Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Resultados de controlabilidad para una ecuación de tipo Korteweg - de Vries con un pequeño término de dispersión

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

George José BAUTISTA SÁNCHEZ

ASESOR

Luis Javier VÁSQUEZ SERPA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Bautista, G. (2018). *Resultados de controlabilidad para una ecuación de tipo Korteweg - de Vries con un pequeño término de dispersión*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ....11:15... horas del Viernes 21 de setiembre de 2018, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Mg. Josué Alonso Aguirre Enciso (MIEMBRO), Mg. Luis Javier Vásquez Serpa (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «RESULTADOS DE CONTROLABILIDAD PARA UNA ECUACIÓN DE TIPO KORTEWEG - DE VRIES CON UN PEQUEÑO TÉRMINO DE DISPERSIÓN», presentado por el señor Bachiller GEORGE JOSÉ BAUTISTA SÁNCHEZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

.Sobresaliente. Dieciocho........(18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, manifestó que el señor Bachiller GEORGE JOSÉ BAUTISTA SÁNCHEZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ..12:00.... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA
PRESIDENTE

MG. JOSUÉ ALONSO AGUIRRE ENCISO
MIEMBRO

MG. LUIS JAVIER VÁSQUEZ SERPA
MIEMBRO ASESOR

Resultados de controlabilidad para una ecuación de tipo Korteweg - de Vries con un pequeño término de dispersión

George José Bautista Sánchez

Tesis de Licenciatura presentada a la Facultad de Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios a la obtención del título de Licenciado en Matemáticas.

Asesor: Luis Javier Vásquez Serpa

Lima - Perú
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Bautista Sánchez, George José
Resultados de controlabilidad para una ecuación de tipo
Korteweg - de Vries con un pequeño término de dispersión.
(Lima) 2018.
XIV, 53 p. 29,7cm (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2018)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.
I. UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas
II.Resultados de controlabilidad para una ecuación de tipo
Korteweg - de Vries con un pequeño término de dispersión.

Agradecimentos

A mis padres Jorge y Estela, por el amor, la confianza y el apoyo incondicional durante todos estos años.

Resumen

En este trabajo, estudiamos propiedades de controlabilidad para la ecuación Korteweg-de Vries lineal en un intervalo limitado. Establecimos un resultado de controlabilidad nula para la ecuación lineal a través de la condición de contorno tipo Dirichlet a la izquierda, y de controlabilidad exacta vía ambas condiciones de contorno de Dirichlet.

Palabras llaves: controlabilidad, equación KdV, límite de dispersión nula

Abstract

In this paper, we study the controllability properties for the linear Korteweg-de Vries equations in a bounded interval. We establish a result of null controllability for the linear equation via the left Dirichlet boundary condition, and of exact controllability via both Dirichlet boundary conditions.

Key Words: controllability, KdV equation, zero dispersion limit

Introducción

Un Poco de Historia de las Ondas Solitarias

Las ecuaciones que modelan el movimiento de ondas en medios dispersivos, lineales y no lineales, tienen sus raices en el descubrimiento de una *"Onda Solitária"* por John Scott Russell, un ingeniero naval escocés. En torno a 1834 observó olas creadas en la superficie de agua en un canal, que parecían propagarse de forma constante y sin modificar su forma. Russell realizó varios experimentos de este fenómeno que llamó de *"Ondas de Traslación"("wave of translation")*, que más tarde quedaría conocida como *"Ondas solitarias"*. En aquel día, Russell observó una ola muy grande, particular, tal onda viajaba a través de un canal, sin perder su forma o velocidad. La fascinación tomó cuenta de Russell, que concentró su atención en los estudios de este tipo de ondas por años.

Con su descubierta, hizo innumerables experimentos conocidos como *"el sistema de linea de ondas para construcción de cascos"*, que consistió en crear una área de la forma de un canal en la cual se colocaba un obstáculo. Atrás del obstáculo se introducía el fluído y, en seguida, se removería tal obstáculo para que una onda larga se formase y se propagase a lo largo del canal, Tales experimentos revolucionaron la arquitectura naval en el siglo XIX, y fue condecorado con la medalla de oro de la Royal Society of Edinburgh"por su trabajo en 1837.

Los experimentos de Russell contradijeron varias conjecturas físicas, tales como la teoría de G. B. Airy [1], en el cual la onda viajante no podría existir, por el motivo que la misma acabaría cambiando su velocidad o su forma, o la teoría de G. G. Stokes [42], en que las ondas de amplitude finita y forma fija son posibles, pero apenas en aguas profundas y solamente en la forma periódica. No entanto, Stokes estaba consciente del estado inacabado de la teoría de Russell:

"Es la opinión del Sr. Russell que la onda solitaria es un fenómeno sui generis. Sus experimentos parecen tornar esta conclusión probable. Caso esté correcto, el carácter analítico de una onda solitaria continua puede ser descubierto."

Consecuentemente, con la finalidad de convencer a la comunidad física, Scott Russell desafió a la comunidad matemática para demostrar teóricamente la existencia del fenómeno que el testificó:

"Habiendo comprobado que nadie ha logrado prever el fenomeno que me aventuré a llamar ondas de traslación ... no era de suponer que, después de que su existencia haya sido descubierta y sus fenómenos determinados, los esfuerzos no serían hechos ... para mostrar cómo ella debería haber sido prevista a partir de conocidas ecuaciones generales del movimiento de fluído. En otras palabras, ahora quedó para los matemáticos el descubrimiento, es decir, para dar una a priori demostración a posteriori ".

Una gran cantidad de investigadores enfrentó el desafío propuesto por Russell. Los propios George Airy y George Stokes se interesaron por el asunto desenvolviendo y analizando principalmente los modelos matemáticos de los fenómenos observados anteriormente en laboratorios.

Una de las grandes contribuciones y respuestas para Russell fue dada por el matemático francés Joseph Boussinesq por vuelta de 1871 [4]. En 1876, el físico inglés Lord Rayleigh obtuvo un resultado diferente [34], y en 1895 los matemáticos holandeses D. J. Korteweg y su alumno G. de Vries dieron el último resultado importante del siglo 19 [24]. En verdad, Boussinesq consideró un modelo de ondas largas incomprensibles y de rotación libre en un canal poco profundo con sección rectangular despreciando la fricción a lo largo de la frontera (paredes do canal).El obtuvo la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right), \tag{1}$$

donde (t, x) son las coordenadas de una partícula del fluído en el tiempo t, h es la amplitud de la onda, H es la altura del agua em equilibrio y g es la constante gravitacional.

Mientras eso, Rayleigh consideró independentemente el mismo fenómeno y acrecentó la hipótesis de la existencia de una onda estacionaria *desapareciendo* en el infinito. El consideró apenas la dependencia espacial y observó el comportamiento da ecuación

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{3}{H^3}h^2\left(h - h_0\right) = 0, \tag{2}$$

con h_0 siendo la cresta de la onda y los otros parámetros definidos de la misma forma que Boussinesq. Esta ecuación posee una forma explícita de solución dado por

$$h\left(x\right) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}}x\right).$$

En 1876, Rayleigh escribió en su artículo [34]:

"Recientemente vi un libro de memorias de Boussinesq, Rendus, vol. LXXII, en el cual contiene una teoría de ondas solitarias muy semejante a las del presente trabajo. Entonces, en la medida en que nuestros resultados son comunes, el crédito de prioridad pertenece, naturalmente, a J. Boussinesq"

Finalmente, en 1895, surgió el famoso artículo de dos científicos holandeses, Diederik Korteweg y Gustav de Vries, que relata um modelo matemático sobre ondas solitarias observado por Russell. La forma original de la ecuación principal del artículo es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right), \tag{3}$$

donde η es la elevación de la superficie del líquido sobre su nivel de equilibrio $l > 0$, $\alpha > 0$ es una constante relacionada al movimento uniforme (propulsión lineal) del líquido, $g > 0$ es la constante de gravedad y $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ es la constante relacionada a las fuerzas capilares del tensor T y de la densidade ρ, constante y positiva. Eliminando las constantes físicas por los cambios de variables

$$t \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\beta}}t, \;\; x \to -\frac{x}{\beta} \;\; \text{e} \;\; u \to -\left(\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{3}\alpha\right)$$

se obtiene la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) padrón

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

que es un modelo que describe la propagación en pequeña amplitud de ondas de aguas poco profundas en un canal de sección transversal rectangular.

Existen innumerables aplicaciones físicas y matemáticas de este modelo, por ejemplo, C.S. Gardner y G.K. Morikawa [15] encontraron una nueva aplicación de este modelos en el estudio de ondas libres de colisión hidromagnéticos con la esperanza de describir la propagación unidireccional de ondas pequeñas pero de amplitud finita en un medio dispersivo no lineal. Además, M. Kruskal y N. Zabusky [44] mostraron que los modelos de ecuaciones KdV para el problema de Fermi-Pasta-Ulam es descrito por ondas longitudinales que se propagan en una red unidimensional de masas iguales acopladas por medio de muelles no lineales. Otras aplicaciones han sido encontrados después del desafío de Russell, tales modelos resultantes son focos de estudios hasta el día de hoy.

Controlabilidad para EDPs - Principales Métodos Utilizados

Estamos interesados en obtener controlabilidad y estabilización para sistemas dispersivos gobernados por EDPs. Vamos a comenzar tratando los importantes problemas relativos a controlabilidad, ellos son: *la controlabilidad interna y controlabilidad en la frontera para EDPs.*

Los varios conceptos de controlabilidad, que concuerdan en dimensión finita, pero no en modo general para las EDPs, son introducidas y caracterizadas por un enfoque de dualidad clásica (ver por ejemplo [11, 27]). En este abordaje, la controlabilidad exacta de un sistema es equivalente a demostrar una *desigualdad de observabilidad* para el sistema adjunto. Tal hecho es basado en el método *HUM – Hilbert Uniqueness Method* dado por J.-L. Lions (para mas detalles ver [27, 28, 29]). Los métodos de controlabilidad dados aquí pueden ser vistos con extenciones naturales del criterio Kalman para sistemas de dimensión finita como es mostrado en [9].

En cuanto a la cuestión de la estabilización, vamos a introducir conceptos de estabilidad en dimensión infinita. Para eso, mostramos algunos métodos que comprueban la estabilización exponencial para EDPs. La estabilizacĩon de una EDP está relacionada fuertemente con la controlabilidad anteriormente definida. Una atención especial dotar la EDPs con un generador infinitesimal anti-adjunto (*skew-adjoint*) para que los conceptos de controlabilidad y estabilidad, considerados aquí, concuerden.

Necesitamos inicialmente introducir algunas notaciones. Vamos a denotar por $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ el operador diferencial con $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ y $\mathcal{D} = (-i\partial_t, -i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_n})$. Por ejemplo, se consideramos $\mathcal{P} = -\tau^2 + |\xi|^2$ tendremos el operador de la ecuación de la onda $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \partial_t^2 - \Delta$. De ahora en adelante, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será un subconjunto abierto suficientemente suave, cuya frontera $\partial\Omega$ es denotada por Γ.

Problema de Controlabilidad Interna

Dados un subconjunto $\omega \subset \Omega$ con frontera suave Γ y un conjunto de condiciones de contorno, que escribiremos como $\mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0$, vamos a considerar el problema de control

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0 & t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0,x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Aquí, $f = f(t,x)$ es el control interno, $z = z(t,x)$ es la función buscada que satisface el sistema anterior y $\mathcal{X}$ representa una función característica. Sean H y U dos espacios funcionales normados, dados z_0 y z_1 en H, buscamos un control $f \in L^2(0,T;U)$ tal que la solución del sistema (5) satisface $z(T,x) = z_1(x)$.

Problema de Controlabilidad en la Frontera

Dados un subconjunto $\gamma \subset \Gamma$ y dos conjuntos de condiciones de contorno, que escribiremos como $\mathcal{B}_1(\mathcal{D}) z = \mathcal{X}_\omega f$, $\mathcal{B}_2(\mathcal{D}) z = 0$, vamos a considerar el problema de control

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D}) z = 0 & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}_1(\mathcal{D}) z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Gamma, \\ \mathcal{B}_2(\mathcal{D}) z = 0 & x \in \Omega, \\ z(0, x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Aquí, $f = f(t, x)$ es el control de frontera, $z = z(t, x)$ es la función buscada que satisface el sistema anterior y $\mathcal{X}$ es una función característica. Dados z_0 y z_1 en H, buscamos un control $f \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución z del sistema (6) satisface $z(T, x) = z_1(x)$.

Controlabilidad y Observabilidad

Conceptos de Controlabilidad

Dados $z_0 \in H$, $u \in L^2(0, T; U)$, consideremos la solución $z : [0, T] \to H$ del siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{7}$$

Recordemos que para cualquier $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ y $u \in W^{1,1}(0, T; U)$, el problema de Cauchy (7) admite una única solución $z \in C([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, T; H)$ dada por la fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t) z_0 + \int_0^t S(t - s) Bu(s) \, ds, \ \forall t \in [0, T].$$

Para $z_0 \in H$ e $u \in L^1(0, T; U)$, la fórmula anterior define una solución suave (*mild solution*) de (7).

Definición 0.1. *Decimos que el sistema (7) es exactamente controlable en el tiempo T si para cualquier $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución del sistema (7) satisface $z(T) = z_T$.*

Definición 0.2. *Decimos que el sistema (7) es nulamente controlable en el tiempo T se para cualquier $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución del sistema (7) satisface $z(T) = 0$.*

Introduciremos ahora el siguiente operador $\mathcal{L}_T : L^2(0, T; U) \longrightarrow H$ definido por

$$\mathcal{L}_T u = \int_0^T S(T - t) Bu(s) \, ds.$$

Así, las siguientes definiciones de controlabilidad, arriba mencionadas, son equivalentes a la :

$$\text{Controlabilidad Exacta en } T \Leftrightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L}_T = H; \tag{8}$$

$$\text{Controlabilidad Nula en } T \Leftrightarrow S(T) H \subset \operatorname{Im} \mathcal{L}_T. \tag{9}$$

En dimensiones finita, i.e., cuando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, los dos conceptos son equivalentes, y la equivalencia es una condición puramente algebraica, la famosa condición de las filas de

Kalman: $rank\left(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right) = n$. Como una consecuencia, el tiempo T no desempeña ningún papel, para mas detalles podemos citar [9, 43].

Para EDPs las situaciones son mas complicadas que para dimensión finita. Por ejemplo:
– no existe ninguna condición algebraica controlabilidad;
– el control en el tiempo desempeña un papel para las EDPs hiperbólicas;
– la recíproca abajo no es natural en general

$$\text{Controlabilidade Exata} \;\Rightarrow\; \text{Controlabilidade a Zero.}$$

Métodos para Controlabilidad

Las pruebas de los resultados aquí citadas son clásicas, y ellos pueden ser encontrados, por ejemplo en [9, 27, 43, 46]. Tales pruebas son basadas en el método H.U.M. devido a J.-L. Lions (ver [27]). Un primer resultado que garantiza a controlabilidad puede ser dado de la siguiente manera:

Resultado A: Diremos que el sitema (7) es **exactamente controlable** en el tiempo $T > 0$ si, y solamente si, existe alguna constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \left\| B^* S^* (t)\, y_0 \right\|_U^2 dt \geq c \left\| y_0 \right\|_H^2, \; \forall y_0 \in H. \tag{10}$$

La desigualdad (10) es llamada *desigualdad de observabilidad.* Tal desigualdad significa que la aplicación

$$\Upsilon : y_0 \longmapsto B^* S^* (\cdot)\, y_0,$$

es limitada e inversíble, o sea, tenemos la llamada *propriedad de observabilidad,* esto quiere decir que es posible recuperar completamente las informaciones sobre o estado inicial y_0, sobre una medida en $[0, T]$, en la salida de los dados $B^* [S^* (t)\, y_0]$.

Otro resultado relacionado con una desigualdad de observabilidad, pero en un sentido mas débil, y así será llamada *desigualdad de observabilidad débil,* nos garantizará la controlabilidad nula del sistema (7) y puede ser formulado como sigue.

Resultado B: El sistema (7) es **controlable a cero o nulamente controlable** en el tiempo $T > 0$ si, y solamente si, existe alguna constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \left\| B^* S^* (t)\, y_0 \right\|_U^2 dt \geq c \left\| S^* (T)\, y_0 \right\|_H^2, \; \forall y_0 \in H. \tag{11}$$

La desigualdad (11) tiene un sentido débil por el hecho de que la misma nos da solamente que las informaciones de $S^* (T)\, y_0$ pueden ser recuperadas, pero no pudiendo recuperar informaciones sobre el estado inicial del sistema y_0.

El método H. U. M. El método H.U.M. desenvuelto por J.-L. Lions es una herramienta de suma importancia para el estudio de controlabilidad de sistemas gobernados por EDPs. Si consideramos un problema de valor inicial y de contorno

$$\Sigma \qquad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

y su problema adjunto, obtenido tomando la distribución del operador adjunto $\partial_t - A$, a saber, $-\partial_t - A^*$:

$$\Sigma^* \qquad \begin{cases} \dot{y} = -A^* y, \\ y(T) = y_T, \end{cases}$$

podemos asumir la siguiente *Identidad llave:* $(z(t), y_T)_H = \int_0^T (u, B^* y)_U \, dt$ y garantizar la equivalencia entre desigualdad de observabilidad y controlabilidad del sistema Σ. Además, podemos concluir que:

– La ecuación de evolución en el *problema adjunto* $\dot{y} = -A^* y$ difiere de un *operador adjunto* $\dot{y} = A^* y$ por un signo de menos. Una simple tranformación $t \to T - t$ hace con que la solución del operador adjunto sean soluciones del problema adjunto;

– El método prueba que el operador $\Lambda : z_T \longmapsto u$ nos dará um control;

– En general, no necesitamos explicitar B y B^*. Los ingredientes importantes para el método son: la *identidad llave* y la *desigualdad de observabilidad*.

Problemas y Principales Resultados

Vamos investigar las propiedades de controlabilidad para la ecuación de Korteweg-de Vries. Para ser más precisos, vamos a investigar propiedades del siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + (My)_x = 0 & \text{en } (0,T) \times (0,1), \\ y(t,0) = v_1, y(t,1) = v_2, y_x(t,1) = v_3 & \text{en } (0,T), \\ y(0,x) = y_0(x) & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{12}$$

donde

$M = M(t,x)$ es un coeficiente de transporte (constante en algunos problemas).

v_i $(i = 1,2,3)$ son funciones dependientes del tiempo, que constituyen los controles de nuestro sistema.

ν es un coeficiente de dispersión positiva .

Observe que la ecuación KdV clásica corresponde a $M = 1 + \frac{u}{2}$.

Como mencionamos en la primera parte de esta introducción, la KdV tuvo su desenvolvimiento a partir de las descubiertas del ingeniero escocés John Scott Russell [38] en el cual observo la creación de ondas a partir de un experimento en un canal de superficie poco profunda. La idea de este trabajo es investigar la controlabilidad (nula y exacta) de este sistema que modela ondas en superficies bajas.

Especificamente, para el problema de controlabilidad nula el estudio fue hecho como sigue:

(I) estudio del problema de Cauchy para la ecuación KdV lineal;

(II) utilización de estimativas de tipo "*Carleman*"para encontrar una *desigualdad de observabilidad* interna apropiada para el estudio de la controlabilidad del sistema lineal asociado a (12);

En relación a la controlabilidad exacta el estudio fue hecho de la siguiente manera:

(I) estudio del problema de Cauchy para la ecuación KdV lineal;

(II) estimativas a priori obtenidas por *métodos de los multiplicadores* (ver [23]) y pruebas de *desigualdades de observabilidad* adecuadas;

La Ecuación KdV en un Intervalo Finito $(0, L)$

Inicialmente vamos a dar atención a la ecuación KdV en un intervalo finito $(0, L)$ con condiciones de frontera del tipo Dirichlet-Neumann, mas precisamente vamos a mencionar los primeros resultados relativos a controlabilidad exacta en la frontera de la ecuación

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{en } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = h_1(t) & \text{en } (0,T), \\ u(t,L) = h_2(t) & \text{en } (0,T), \\ u_x(t,L) = h_3(t) & \text{en } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } (0,L). \end{cases} \tag{13}$$

La controlabilidad en la frontera de la KdV fue primeramente estudiada por Rosier [35] cuando consideró el sistema (13) con solamente un control h_3 ($h_1 = h_2 \equiv 0$) en acción. El demostró que el sistema (13) es localmente exactamente controlable en el espacio $L^2(0, L)$.

Teorema 1. *[35]Sean $T > 0$ y*

$$L \notin \mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}} : j, l \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{14}$$

Considere $\delta > 0$ tal que u_0, $u_T \in L^2(0,L)$ satisfazen

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

entonces, existe un control interno $h_3 \in L^2(0,T)$ tal que el sistema (13) con $h_1 = h_2 \equiv 0$ admite una única solución

$$u \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$$

que satisface

$$u(0,x) = u_0(x) \ \ y \ \ u(T,x) = u_T(x).$$

El teorema fue inicialmente probado para el sistema lineal usando o método H. U. M con la afirmación que los datos deben ser suficientemente pequeños. Con el resultado lineal en manos, fue extendido el resultado de controlabilidad exacta para el sistema no lineal obteniendo el Teorema 1, utilizando el principio de contracción. En este trabajo, Rosier prueba que si $L \in \mathcal{N}$ el sistema lineal asociado a (13) con $h_1 = h_2 \equiv 0$ no es exactamente controlable; esto es; existe un subespacio de dimensión finita M de $L^2(0,L)$ para el cual las soluciones del sistema no lineal son llevadas del origen a un determinado tiempo final T. Mas precisamente, para cualquier $0 \neq u_T \in M$, la solución u de (13) satisface

$$u(0,x) = 0, \quad u(T,x) \neq u_T,$$

para cualquier control interno $h_3 \in L^2(0,L)$. De ahora en adelante, un dominio $(0,L)$ es llamado crítico si se longitud $L \in \mathcal{N}$.

En lo que dice respecto a la controlabilidad en las longitudes críticas, Coron y Crépeau, en [10], prueban que el sistema (13) con $h_1 = h_2 \equiv 0$ e $L = 2k\pi \in \mathcal{N}$ es localmente exactamente controlable en el espacio $L^2(0,L)$ aún cuando su sistena lineal asociado **no es exactamente controlable.** Para obtener tal resultado los autores hacen uso de un método denominado *método del retorno* debido a Coron en [9].

Teorema 2. [10]*Sea* $T > 0$ *y* $L = 2k\pi \notin \mathcal{N}$ *para algún entero* k. *Existe un* $\delta > 0$ *tal que para* $u_0, u_T \in L^2(0, L)$ *satisfaciendo*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

se puede encontrar un controle $h_3 \in L^2(0, T)$ *donde el sistema (13), con* $h_1 = h_2 \equiv 0$, *admite una única solución*

$$u \in C\left([0, T]; L^2(0, L)\right) \cap L^2\left(0, T; H^1(0, L)\right)$$

que satisface

$$u(0, x) = u_0(x) \;\; y \;\; u(T, x) = u_T(x).$$

Otros resultados relativos a controlabilidad del sitema (13) fueron probados. Por ejemplo, en Glass-Guerrero [17] y Rosier [36], los autores garantizan que el sistema (13) es controlable a cero cuando se considera $h_3 \equiv 0$.

En [36], el autor esclarece de forma breve el motivo físico por el cual se debe considerar el control actuando del lado derecho del dominio espacial en la ecuación KdV, además, el considera el sistema (13) con apenas un control actuando en la frontera, a saber h_1. Usando una estimativa del tipo Carleman, el prueba que el sistema (13), con $h_2 = h_3 \equiv 0$, es localmente controlable por trayectorias y, en particular, es localmente controlable a cero.

Teorema 3. [36]*Sean* $T > 0$ *y* $L > 0$. *Considere*

$$v \in C\left([0, T]; H^2(0, L)\right) \cap C^1\left([0, T]; L^2(0, L)\right) \cap H^1\left(0, T; H^1(0, L)\right),$$

siendo una función que satisface

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & en\,(0, T) \times (0, L), \\ v(t, L) = v_x(t, L) = 0 & en\;\;(0, T), \\ v(0, x) = v_0(x) & en\;\;(0, L). \end{cases} \tag{15}$$

Entonces, existe un $\delta > 0$ *tal que para* $u_0 \in H^3(0, L)$ *con* $u_0(L) = u_0'(L) = 0$ *y*

$$\|u_0 - v_0\|_{H^3(0,L)} \leq \delta,$$

existe una función

$$u \in C\left([0, T]; L^2(0, L)\right) \cap L^2\left(0, T; H^1(0, L)\right)$$

el cual es solución de

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & en\,(0, T) \times (0, L), \\ u(t, L) = u_x(t, L) = 0 & en\;\;(0, T), \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u(T, x) = v(T, x) & en\;\;(0, L). \end{cases} \tag{16}$$

Observe que en (16) el autor especifica solamente dos condiciones de contorno. Para tal sistema ser considerado compatible es necesatio agregar una tercera condición de contorno envolviendo el control, por ejemplo

$$u(t, 0) = h_1(t).$$

En este caso, Rosier considera el h_1 en la clase $H^1(0, T)$. Sin embargo, algunos años después, Glass y Guerrero, en [17], nos dicen que es posible tornar ese control más regular a través del siguiente resultado.

Teorema 4. [17]*Sean* $T > 0$ *y* $L > 0$. *Considere* $v \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$ *solución de*

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & en\ (0,T) \times (0,L), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,L) = 0 & en\,(0,T), \\ v(0,x) = v_0(x) & en\ (0,L). \end{cases}$$

Entonces, existe un $\delta > 0$ *tal que para* $u_0 \in L^2(0,L)$ *con*

$$\|u_0 - v_0\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

existe $h_1 \in H^{1/2-\epsilon}$ *tal que el sistema (13) con* $h_2 = h_3 \equiv 0$ *admite una única solución*

$$u \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$$

satisfaciendo

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(T,x) = v(T,x).$$

Glass y Guerrero también consideran en este mismo trabajo el sistema (13) con $h_3 \equiv 0$. Ellos prueban que este sistema es localmente exactamente controlable en $L^2(0,L)$ aún cuando el dominio espacial es crítico.

Teorema 5. [17]*Sean* $L > 0$ *y* $T > 0$. *Existe un* $\delta > 0$ *tal que para cualquier* $u_0, u_T \in L^2(0,L)$ *con*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

existen controles $h_1, h_2 \in L^2(0,T)$ *tal que la solución del sistema (13) con* $h_3 \equiv 0$ *admite una única solución*

$$u \in C\left([0,T]; H^{-1}(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; L^2(0,L)\right)$$

que satisface

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(T,x) = u_T.$$

Motivados por los Teoremas 4 y 5, nos dedicaremos al estudio de los principales resultados de controlabilidad obtenidos en [17] para el sistema lineal correspondiente. Mas precisamente, probaremos los siguientes resultados:

Teorema A. *Sea* M *una constante y* $\nu > 0$ *fijo. Entonces, para cada* $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, *existe* $v_1 \in L^2(0,T)$, *tal que la solución* $y \in Y_0$ *de (12) con datos* $v_2 = v_3 = 0$ *satisface* $y|_{t=T} = 0$ *en* $(0,1)$. *Además, para cada* $\nu \in (0,1)$, *existe* $C^* > 0$, *tal que*

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C^*}{\nu}\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \tag{17}$$

Por otro lado, para ν *suficientemente pequeño (en terminos de* M *solamente), obtenemos*

$$C^* = exp\left\{\frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)\right\}, \tag{18}$$

donde $\tilde{C}$ *es una constante independiente de* M, ν *y* y_0.

Teorema B. *Sea* M *una constante y* $\nu > 0$ *fijo. Entonces, para cada* $y_0, y_1 \in L^2(0,1)$, *existen* v_1 *y* v_2 *en* $L^2(0,T)$, *tales que a solución* $y \in Y_0$ *de (12) con* $v_3 = 0$ *satisface* $y|_{t=T} = y_1$ *en* $(0,1)$.

Esos resultados serán probados utilizando el método **HUM** que mencionamos en la sección anterior.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos resultados clásicos que serán usados a lo largo del trabajo. Las demostraciones se pueden encontrar en [2], [5], [18], [26], [29], [30], [31], [32], [33], [37] y [45].

1.1. Espacios L^p

Sea Ω un abierto del $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones definidas en Ω con valores en K, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tales que $|u|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue en Ω.

El espacio $L^p(\Omega)$ unido de la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

y

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 1. *Si $u \in L^1(\Omega)$ entonces las integrales indefinidas de u son funciones continuas.*

Proposición 2. (Desigualdad de Young) - *Sean $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $a, b > 0$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposición 3. (Desigualdad de Minkowski) - *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y f, g en $L^p(\Omega)$, entonces*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposición 4. (Desigualdad de Hölder) - *Sean* $u \in L^p(\Omega)$ *y* $v \in L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Entonces* $uv \in L^1(\Omega)$ *y tenemos las desigualdad*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Sigue como corolario de la Proposición anterior el siguiente resultado:

Corolario 1. (Desigualdad de Hölder generalizada) - *Sean* $f_1, f_2, \dots, f_k$ *funciones tales que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *donde* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ *y* $\dfrac{1}{p} \leq 1$. *Entonces el producto* $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ *y*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Además de los resultados arriba, tenemos que:

i) $L^p(\Omega)$ es reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ es separable para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene inmersión continua y densa en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Si (f_n) es una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ son tales que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ casi siempre en Ω.

Teorema 6. (Teorema de la Representación de Riesz) - *Sean* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *con* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Entonces, existe una única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Cuando $p = \infty$, obtenemos:

Proposición 5. *Sea* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *entonces existe una única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ y \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ el espacio de las (clases de) funciones $u : \Omega \to K$ tales que $|u|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω unido de la siguiente noción de convergencia: Una sucesión u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ si para cada compacto K de Ω se tiene:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Sea* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *entonces* $T_u = 0$ *si, y solamente si,* $u = 0$ *casi siempre en* Ω, *donde* T_u *es la distribución definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De este Lema se tiene que T_u queda unívocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, esto es, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u = T_v$ sí, y solamente sí, $u = v$ casi siempre en Ω.

Proposición 6. *Sea $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$, entonces $u_\nu \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Lema 2. (Lema de J-L. Lions) - *Sea (u_ν) una sucesión de funciones en $L^q(Q)$ con $1 < q < \infty$. Si*

i) $u_\nu \to u$ casi siempre en Q,

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

entonces, $u_\nu \rightharpoonup u$ débil en $L^q(Q)$.

1.1.1. Espacios de Sobolev

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$, tales que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertenece a $L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones.

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ unido con la norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

y

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \mathrm{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

es un espacio de Banach.

Representamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ que son espacios de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso em $L^p(\Omega)$, pero no es verdad que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razón definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se representa por $W^{-m,q}(\Omega)$ el dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se denota por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposición 7. *Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^m, con frontera limitada y m un entero tal que $m \geq 1$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 7. (Teorema de Rellich-Kondrachov) - *Sea Ω un subconjunto abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de clase C^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*
si $p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \ L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,
si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \ L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,
si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \ C(\overline{\Omega})$,
con inmersiones compactas.

Proposición 8. *Sean $1 \leq q \leq p \leq \infty$ y enteros $m > n$. Entonces*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||^{1-a}_{L^q(\Omega)}||u||^a_{W^{1,m}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

donde

$$a = \frac{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}},$$

para alguna constante $C > 0$.

Para todo número real $s > 0$ definimos el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Este espacio coincide com los espacios $H^m(\mathbb{R}^n)$ cuando s es un número entero. De forma análoga al caso $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ se muestra que las funciones $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $\mathbb{R}^n$. Definimos $H^s(\mathbb{R}^n)$ para valores negativos de s como siendo el espacio dual de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.
En el caso en que Ω sea de clase C^m, podemos definir los espacios fraccionarios

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Si unimos a este espacio con la norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad v = u \quad \text{en} \quad \Omega\},$$

se tiene que $H^s(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 9. *$D(\overline{\Omega})$ es denso en $H^s(\Omega)$ para todo $s \geq 0$ real.*

Proposición 10. *Si $0 \leq s_1 \leq s_2$, entonces $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.*

Proposición 11. *Si $s - \frac{n}{2} > m$, m entero no negativo, entonces*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}).$$

1.2. Espacios Funcionales a Valores Vectoriales

En esta sección vamos a determinar los espacios en que se consideran las variables temporal y espacial, los cuales son necesarios para dar sentido a los problemas de evolución. Sean X un espacio de Banach y $a, b \in \mathbb{R}$.

El espacio $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste de las (clases de) funciones medibles sobre $[a, b]$ con imagen en X, o sea, las funciones $u : (a, b) \rightarrow X$, tales que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El espacio $L^\infty(a, b; X)$ consiste de las (clases de) funciones medibles sobre $[a, b]$ con imagen en X, limitadas casi siempre en (a, b). La norma en este espacio es dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \text{ínf} \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

El espacio $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots,$ consiste de todas las funciones continuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que tienen derivadas continuas hasta el orden m sobre $[a, b]$. La norma es dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \text{ínf} \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

El espacio $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots,$ consiste de todas las funciones continuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que tienen derivadas continuas hasta el orden m sobre $[a, b]$. La norma es dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Veamos algunas propiedades de estos espacios.

Proposición 12. *Sean $m = 0, 1, \ldots; 1 \leq p < +\infty$; X y Y espacios de Banach sobre el cuerpo K, donde $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Entonces:*

i) $C^m([a, b]; X)$ es un espacio de Banach sobre K.

ii) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ y $L^\infty(a, b; X)$, son espacios de Banach sobre K.

iii) $C([a, b]; X)$ es denso en $L^p(a, b; X)$ y la inmersión $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ es continua.

iv) Se X es un espacio de Hilbert con produto escalar $(.,.)_X$, entonces $L^2(a, b; X)$ es también un espacio de Hilbert con produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

v) $L^p(a, b; X)$ es separable, si X fuera separable y $1 \leq p < +\infty$.

vi) Si $X \hookrightarrow Y$, entonces $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Denotaremos por $D(a,b;X)$ el espacio localmente convexo completo de las funciones vectoriales $\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciables con soporte compacto en (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ en $D(a,b;X)$ si:

i) $\exists\, K$ compacto de (a,b), tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ y $supp\,(\varphi)$ están contenidos en K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ en X uniformemente en $t \in (a,b)$.

Sea $v \in L^p(0,T;X)$, donde X es un espacio de Hilbert separable y $\varphi \in D(0,T)$. La integral en X

$$\int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

existe, siendo un vector de X(esta integral es entendida como una integral en X). Así, dado $v \in L^p(0,T;X)$, la aplicación

$$Tv : D(0,T) \quad \longrightarrow \quad X$$

definida por

$$\langle Tv, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

está bien definida, es lineal y continua. Se denota por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ el espacio de las distribuciones sobre $(0,T)$ con valores en X, esto es, el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $D(0,T)$ en X. De este modo, $Tv \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ y se demuestra que Tv es unívocamente definida por v. Luego, identificando la función v con la distribución Tv se puede afirmar que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Se concluye, de este hecho que toda $v \in L^p(0,T;X)$ posee derivadas de todas las ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$.

Sea $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. La derivada de orden n de T es definida como siendo la distribución vectorial sobre $(0,T)$ con valores en X dada por

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

1.3. El Adjunto de un operador lineal no limitado

Sean X, Y espacios de Banach y $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un operador lineal no limitado con dominio denso. Definamos el conjunto

$$D(A^*) = \{v \in Y'; \quad \exists\, c > 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Para cada $v \in D(A^*)$, definimos la aplicación $g_v : D(A) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_v(u) = \langle v, Au \rangle, \quad \forall u \in D(A),$$

que satisface

$$|g_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Observe que g_v es un operador lineal limitado, con dominio denso. Entonces existe una única extensión lineal limitada $f_v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de g_v, que satisface

$$|f_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in X.$$

Así, definimos

$$\begin{array}{rccl} A^* : & D(A^*) \subset Y' & \rightarrow & X' \\ & v & \mapsto & A^*v = f_v \end{array} \tag{1.1}$$

que es denominado el operador adjunto de A. Como f_v extiende g_v, entonces ellos coinciden en $D(A)$ y con (1.1) resulta la relación de adjunción:

$$\langle A^*v, u\rangle = \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Un resultado que será utilizado, sobre adjunto de un operador lineal no limitado, es el siguiente:

Teorema 8. *El adjunto de un operador es un operador cerrado.*

1.4. C_0 - Semigrupos

Durante esta sección, X denotará un espacio de Banach y $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de los operadores lineales limitados de X en X. Una familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es denominada un Semigrupo de Operadores Lineales cuando satisface:

i) $S(0) = I$, donde I denota el operador identidad de $\mathcal{L}(X)$;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}_+$.

El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es denominado de clase C_0, o C_0-semigrupo, cuando satisface:

iii) $\lim\limits_{t\to 0_+} ||S(t)x - x||_X = 0, \quad \forall\, x \in X.$

Proposición 13. *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo, entonces $t \mapsto ||S(t)||_X$ es una función limitada en todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Resulta, de la Proposición anterior, que existen $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que

$$||S(t)||_X \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En el caso que $\omega = 0$ y $M = 1$, el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es denominado C_0-**semigrupo de contracciones**.

Definición 1.1. *El operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \quad \textit{existe} \right\};$$

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

es denominado generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposición 14. *$D(A)$ es unsubespacio vectorial de X y A es un operador lineal.*

Proposición 15. *Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.*

i) Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$, $\quad \forall t \geq 0$ y

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax; \tag{1.2}$$

ii) Si $x \in D(A)$ entonces

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau; \tag{1.3}$$

iii) Si $x \in X$, entonces $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ y

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau. \tag{1.4}$$

iv) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x. \tag{1.5}$$

Proposición 16. *i) El generador infinitesimal de un C_0-semigrupo es un operador lineal cerrado y su dominio es denso en X;*

ii) Un operador lineal A, cerrado y con dominio denso en X, es el generador infinitesimal de, en lo máximo, un C_0-semigrupo .

Definición 1.2. *i) Se dice que un operador lineal $A : D(A) \subset X$ es disipativo si, para alguna aplicación dualidad j,*

$$Re\langle j(x), Ax \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A). \tag{1.6}$$

En el caso en que X es un espacio de Hilbert, equivalentemente, $A : D(A) \subset X$ es disipativo cuando

$$(Ax, x)_X \leq 0, \quad \forall x \in D(A);$$

ii) Se dice que A é m-dissipativo si fuera disipativo y $Im(I\lambda - A) = X$ para algún $\lambda > 0$;

iii) Se dice que A es acretivo (m-acretivo) si $-A$ fuera disipativo (m-dissipativo).

Teorema 9 (Lumer-Phillips). *Un operador A es gerador de un C_0-semigrupo de contracciones si, y solamente si, A es m-disipativo y densamente definido.*

Corolario 2. *Sea A un operador lineal cerrado densamente definido. Si A y su adjunto A^* son disipativos, entonces A es generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones.*

1.5. Interpolación de Espacios de Sobolev

Sean X e Y dos espacios de Hilbert separables, con inmersión continua y densa. Sean $(,)_X$ y $(,)_Y$ los productos internos de X e Y, respectivamente.

Indicaremos por S, el conjunto de todas las funciones u definidas en X, tal que la aplicación $v \longrightarrow (u,v)_X$, $v \in X$ es continua en la topología inducida por Y. Entonces $(u,v)_X = (Sv,u)_Y$ define S, como siendo un operador ilimitado en Y con dominio $D(S)$, denso en Y.

S es un operador auto-adjunto y estríctamente positivo. Usando la descomposición espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir S^{θ} , $\theta \in \mathbb{R}$. En particular, usaremos $A = S^{1/2}$.

El operador A, es auto-adjunto, positivo definido en Y, con dominio X y

$$(u,v)_X = (Au,Av)_Y\,, \qquad \forall u,v \in X.$$

Definición 1.3. *Con las hipótesis anteriores, definimos el espacio intermediario*

$$[X,Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \qquad \textit{(dominio de} \quad A^{1-\theta}), 0 \leq \theta \leq 1,$$

con la norma

$$\|u\|^2_{[X,Y]_\theta} = \|u\|^2_Y + \|A^{1-\theta}\|^2_Y.$$

Observación.

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$.

2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^{\theta}$.

3. Si $0 < \theta_0 < \theta < 1$, entonces $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$ donde la inyección es densa.

4. $\left[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}\right]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1}$.

Proposición 17. *Sea $u \in X$. Entonces,*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq C\|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^{\theta},$$

para alguna constante positiva C.

Teorema 10. *Sean A_0, A_1 espacios de Banach y $1 \leq p_0 < \infty$, $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$. Entonces,*

$$[L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1)]_\theta = L^p([A_0,A_1]_\theta),$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Además, si $1 \leq p_0 < \infty$ se tiene

$$[L^{p_0}(A_0), L^{\infty}(A_1)]_\theta = L^p([A_0,A_1]_\theta),$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$.

Teorema 11. *Sean Ω, un conjunto suficientemente regular de $\mathbb{R}^n$, $s_1 > s_2 \geq 0$, tales que s_1 y $s_2 \neq k + 1/2$ (k entero ≥ 0). Entonces,*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 - \theta s_2}(\Omega),$$

si $(1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + 1/2$ y

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)m}(\Omega),$$

si $(1-\theta)m \neq k + 1/2$, con normas equivalentes.

Teorema 12. *Sea Ω suficientemente regular. Sean s_1 y $s_2 \geq 0$, tales que $s_2 \neq \mu + 1/2$ (μ entero ≥ 0). Entonces,*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{-s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 - \theta s_2}(\Omega), \tag{1.7}$$

si $(1-\theta)s_1 - \theta s_2 \neq -1/2 - \nu$ (ν entero ≥ 0).

Teorema 13. *Sea $\tilde{X}, \tilde{Y}$ un par de espacios de Hilbert, con las propiedades análogas a las del par X, Y. Si $\pi \in L(X, Y) \cap L(\tilde{X}, \tilde{Y})$, entonces*

$$\pi \in L([X, \tilde{X}]_\theta; [Y, \tilde{Y}]_\theta) \text{ para todo } 0 < \theta < 1.$$

Definición 1.4. *Decimos que dos espacios vectoriales topológicos normados X e Y son compatibles si existe un espacio vectorial topológico separable U, tal que X e Y son subespacios de U.*

Consideremos el par (X, Y) de espacios compatibles, entonces podemos definir su suma, denotada por

$$\sum(X, Y) = X + Y = \{u \in U, \quad u = x + y, \quad x \in X, y \in Y\},$$

unido con la norma

$$\|u\|_{\sum(X,Y)} = inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y, \quad u = x + y\}$$

y

$$\triangle(X, Y) = X \cap Y$$

unido con la norma

$$\|u\|_{\triangle(X,Y)} = max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Sean $S = \{z | z \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ y $S_0 = \{z | z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}(z) < 1\}$. Definimos $\mathbb{F}(X, Y)$ como el conjunto de las funciones continuas en S que satisfacen:

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \sum(X, Y)$. analítica en S_0;

2. $\|f(z)\|_{\sum(X,Y)} \leq M$, $\forall z \in S$;

3. $t \longrightarrow f(it) \in X$, siendo continua y nula en el infinito;

4. $t \longrightarrow f(1+it) \in Y$, siendo continua y nula en el infinito,

unido con la norma

$$\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} = max\{sup_t\|f(it)\|_X, sup_t\|f(1+it)\|_Y\}.$$

Lema 3. *El espacio $\mathbb{F}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Definición 1.5. *Definimos $[X,Y]_\theta$ como*

$$[X,Y]_\theta = \Big\{u| \quad u \in \sum(X,Y), u = f(\theta), \quad para\ algún \quad f \in \mathbb{F}(X,Y)\Big\}$$

unido con la norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = inf\left\{\|f(\theta)\|_{\mathbb{F}(X,Y)}| \quad u = f(\theta), \quad f \in \mathbb{F}(X,Y)\right\}.$$

Observación.

1. El espacio $[X,Y]_\theta$ es un espacio de Banach.

2. $\triangle(X,Y) \subset [X,Y]_\theta \subset \sum(X,Y)$.

Teorema 14. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $1 \leq p_0$, $p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$. Entonces,*

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{p_1}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ con normas equivalentes. Si $1 \leq p_0 < \infty$, tenemos

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{\infty}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta)$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$ con normas equivalentes.

Capítulo 2

El Problema de Cauchy

Dado $T > 0$, consideremos el sistema

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + (My)_x = 0 & \text{en } (0,T) \times (0,1) \\ y\mid_{x=0} = v_1, y\mid_{x=1} = v_2, y_x\mid_{x=1} = v_3 & \text{en } (0,T) \\ y\mid_{t=0} = y_0 & \text{en } (0,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Estudiaremos la siguiente clase de soluciones:

Definición 2.1. *Dados $T > 0$, $y_0 \in H^{-1}(0,1)$ y $(v_1, v_2, v_3) \in [L^2(0,T)]^2 \times H^{-1/3}(0,T)$, decimos que una función $y \in L^2((0,1) \times (0,T))$ es una solución (por transposición) de (2.1) si y satisface*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 yf \, dxdt = &\langle y_0, u\mid_{t=0} \rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)} + \nu \int_0^T v_1 u_{xx}\mid_{x=0} dt - \nu \int_0^T v_2 u_{xx}\mid_{x=1} dt \\ &+ \nu \langle v_3, u\mid_{x=1} \rangle_{H^{-1/3}(0,T)\times H^{1/3}(0,1)}, \qquad \forall f \in L^2((0,1) \times (0,T)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde u es solución del siguiente problema adjunto

$$\begin{cases} -u_t - \nu u_{xxx} - M u_x = f & en\ (0,T) \times (0,1) \\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=1} = u_x\mid_{x=0} = 0 & en\ (0,T) \\ u\mid_{t=T} = 0 & en\ (0,1). \end{cases} \tag{2.3}$$

Los resultados de la existencia de esta clase de solución se darán en la sección (2,33) y dependen del Teorema de la Representación de Riesz, de argumentos de interpolación y de las estimativas siguientes.

2.1. Estimativas de Energía

En esta sección vamos a probar que para f en $L^2(0,T;H^{-1}(0,1)) \cup L^1(0,T;L^2(0,1))$ la solución del sistema adjunto (2.3) está en el espacio

$$Y_{1/4} = L^2(0,T;H^1(0,1)) \cap C^0([0,T];L^2(0,1)).$$

Lema 4. *Sea M una constante y $f \in L^2(0,T;H^{-1}(0,1)) \cup L^1(0,T;L^2(0,1))$. Entonces, la solución u del sistema (2.3) pertenece a $Y_{1/4}$. Además, existe una constante positiva C, tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \nu^{1/2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \tag{2.4}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \nu^{1/2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|_{L^2(0,T)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.5}$$

Demostración. Basta mostrar para $f \in C_0^\infty((0,T)\times(0,1))$. El resultado sigue por argumentos de densidad.

Primer caso: $f \in L^2(0,T;H^{-1}(0,1))$.

Multiplicamos la ecuación (2,3) por $(1-x)u$ e integramos con respecto a x :

$$-\int_0^1 (1-x)uu_t\,dx - \nu\int_0^1 (1-x)uu_{xxx}\,dx - M\int_0^1 (1-x)uu_x\,dx =$$

$$= \langle f,(1-x)u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}. \tag{2.6}$$

Observe que

$$-\nu\int_0^1 (1-x)uu_{xxx}dx = \nu\int_0^1 (1-x)u_xu_{xx}dx - \nu\int_0^1 uu_{xx}dx \tag{2.7}$$

$$-M\int_0^1 (1-x)(uu_x)\ dx = -M\int_0^1 (1-x)(\frac{u^2}{2})_x dx = \frac{-M}{2}\int_0^1 u^2dx. \tag{2.8}$$

Substituyendo (2,7) y (2,8) en (2,6) obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 (1-x)u^2dx + \nu\int_0^1 ((1-x)(u_xu_{xx}) - uu_{xx})dx - \frac{M}{2}\int_0^1 u^2dx =$$

$$= \langle f,(1-x)u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}. \tag{2.9}$$

Nuevamente, integrando por partes, obtenemos las identidades

$$\int_0^1 (1-x)u_x u_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 dx \tag{2.10}$$

y

$$-\int_0^1 u u_{xx} dx = \int_0^1 u_x^2 \; dx. \tag{2.11}$$

Substituyendo (2,10) y (2,11) en (2,9) y utilizando la desigualdad de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (1-x)u^2 dx + \nu\frac{3}{2}\int_0^1 u_x^2 dx &= \frac{M}{2}\int_0^1 u^2 dx + \langle f, (1-x)u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)} \\ &\leq \quad \frac{M}{2}\int_0^1 u^2 dx \quad + \quad \|f\|_{H^{-1}(0,1)}\|(1-x)u\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leq \quad \frac{M}{2}\int_0^1 u^2 dx \quad + \quad \frac{\nu}{2}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)} \quad + \quad \frac{1}{2\nu}\|(1-x)u\|^2_{H_0^1(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como

$$\|(1-x)u\|^2_{H_0^1(0,1)} = \int_0^1 u^2 dx - 2\int_0^1 (1-x)(uu_x)dx + \int_0^1 (1-x)^2 u_x^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_x^2 dx \tag{2.13}$$

de (2,13) y (2,12) se obtiene

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (1-x)u^2 dx + \frac{3}{2}\nu\int_0^1 u_x^2 dx \leq C\int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}. \tag{2.14}$$

Ahora, multiplicamos la ecuación (2.3) por u e integramos con respecto a x :

$$-\int_0^1 uu_t dx - \nu\int_0^1 uu_{xxx}dx - M\int_0^1 uu_x dx = \langle f, u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}. \tag{2.15}$$

Observe que

$$\int_0^1 uu_x dx = 0 \tag{2.16}$$

y

$$-\int_0^1 uu_{xxx}dx = \int_0^1 u_x u_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_x^2)_x dx = \frac{1}{2}|u_x\;|_{x=1}\;|^2. \tag{2.17}$$

Integrando por partes, usando las desigualdades arriba y aplicando la desigualdad de Hölder sigue que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx+\frac{\nu}{2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|^2 = \langle f, u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)} \leq \frac{1}{2\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}+\frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2dx. \quad (2.18)$$

Combinando las desigualdades (2,14) y (2,18) obtenemos la siguiente desigualdad

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(2-x)u^2dx+\nu\int_0^1 u_x^2dx+\frac{\nu}{2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|^2 \leq$$

$$\leq C\int_0^1 u^2dx+\frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}$$
$$\leq \frac{C}{2}\int_0^1(2-x)u^2dx+\frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}.$$

Así,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(2-x)u^2dx-\frac{C}{2}\int_0^1(2-x)u^2dx+\frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{\nu}{2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|^2 \leq$$

$$\leq \frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}.$$

Luego,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{Ct}\int_0^1(2-x)u^2dx)+\frac{\nu}{2}e^{Ct}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{\nu}{2}e^{Ct}\|u_x\ |_{x=1}\ \|^2 \leq \frac{C}{\nu}e^{Ct}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}. \quad (2.19)$$

Recordando que $u(T,x)=0$, integramos (2.19) de t hasta T obteniendo

$$\frac{1}{2}e^{Ct}\int_0^1(2-x)u^2dx+\frac{\nu}{2}\int_t^T(e^{Cs}\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds+\nu\int_t^T e^{Cs}\|u_x(s,1)\|^2ds \leq$$
$$\leq C\int_t^T\frac{e^{Cs}}{\nu}\|f(s)\|^2_{H^{-1}(0,1)}ds. \quad (2.20)$$

De la desigualdad (2,20) obtenemos una constante $C>0$ que satisface

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^2dx \leq \frac{1}{2}e^{Ct}\int_0^1(2-x)u^2dx \leq C\int_t^T\frac{e^{CT}}{\nu}\|f(s)\|^2_{H^{-1}(0,1)}ds$$

$$\leq \frac{C}{\nu}\int_0^T\|f(s)\|^2_{H^{-1}(0,1)}ds,$$

osea,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \tag{2.21}$$

Nuevamente, de la desigualdad (2,20) sigue que

$$\frac{\nu}{2}\int_t^T(\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds \leq \frac{\nu}{2}\int_t^T(e^{Cs}\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds \leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|f(s)\|^2_{H^{-1}(0,1)}ds$$

y

$$\nu\int_t^T \|u_x(s,1)\|^2ds \leq \nu\int_t^T e^{Cs}\|u_x(s,1)\|^2ds \leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|f(s)\|^2_{H^{-1}(0,1)}ds.$$

Haciendo $t \to 0$ en las desigualdades arriba, se tiene

$$\nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}, \tag{2.22}$$

$$\nu^{1/2}\|u_x\;|_{x=1}\;\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \tag{2.23}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (2,21), (2,22) y (2,23), obtenemos (2,4).

Segundo caso:$f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$.

Procediendo como en el caso anterior deducimos que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(1-x)u^2dx + \nu\frac{3}{2}\int_0^1 u_x^2dx \leq \frac{M}{2}\int_0^1 u^2dx + \int_0^1 fudx \tag{2.24}$$

y

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx + \frac{\nu}{2}\|u_x\;|_{x=1}\;\|^2 = \int_0^1 fudx. \tag{2.25}$$

Sumando las desigualdades anteriores,obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(2-x)u^2dx + \frac{3\nu}{2}\int_0^1 u_x^2dx + \frac{\nu}{2}\|u_x\;|_{x=1}\;\|^2 &\leq \frac{C}{2}\int_0^1 u^2dx + 2\int_0^1 fudx \\ &\leq \frac{C}{2}\int_0^1(2-x)u^2dx + C\int_0^1 fudx.\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{Ct}\int_0^1(2-x)u^2dx)+\frac{3\nu}{2}e^{Ct}\int_0^1 u_x^2dx + \frac{\nu}{2}e^{Ct}\|u_x\;|_{x=1}\;\|^2 &\leq Ce^{Ct}\int_0^1 fudx \\ &\leq Ce^{CT}\int_0^1 fudx \leq C\int_0^1 fudx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Integrando de t hasta T resulta de (2,26) que

$$\frac{1}{2}e^{Ct}\int_0^1 (2-x)u^2dx + \frac{3\nu}{2}\int_t^T (e^{Cs}\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds + \frac{\nu}{2}\int_t^T e^{Cs}\|u_x(s,1)\|^2ds$$

$$\leq C\int_t^T\int_0^1 fudxds \leq C\int_0^T\int_0^1 fudxds. \tag{2.27}$$

De (2,27) obtenemos una constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 u^2dx \leq \frac{1}{2}e^{Ct}\int_0^1 (2-x)u^2dx &\leq C\int_0^T\int_0^1 fudxds\\ &\leq C\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\\ &\leq \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + C\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\end{aligned}$$

donde

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.28}$$

Nuevamente, de la desigualdad (2,27) tenemos la estimativa

$$\frac{3\nu}{2}\int_t^T\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds \leq \frac{3\nu}{2}\int_t^T (e^{Cs}\int_0^1 u_x(s,x)^2dx)ds \leq C\int_0^T\int_0^1 fudxds.$$

Haciendo $t \longrightarrow 0$, por la desigualdad (2,28) obtenemos que

$$\nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.29}$$

Análogamente, de las desigualdades (2,27) y (2,28) (haciendo $t \longrightarrow 0$) limitamos el término de frontera $u_x|_{x=1}$:

$$\frac{\nu}{2}\int_t^T \|u_x(s,1)\|^2ds \leq C\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))},$$

osea,

$$\nu^{1/2}\|u_x\,|_{x=1}\,\|_{L^2(0,T)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.30}$$

Sumando las desigualdades (2,28), (2, 29) y (2,30) resulta (2,5). $\square$

Lema 5. *Sea M en $Y_{1/4}$ y f como en el Lema 4. Entonces, existe una única solución u en $Y_{1/4}$ del sistema (2,3). Además, existe una constante positiva $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$, tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \|u_x\mid_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \tag{2.31}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \|u_x\mid_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.32}$$

Demostración. Si $f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$, entonces (2,32) sigue del segundo caso del Lema 1. Si $f \in L^2(0,T;H^{-1}(0,1))$, por el caso 1 del Lema anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (1-x)u^2 dx + \frac{3\nu}{2}\int_0^1 u_x^2 dx - \int_0^1 M(1-x)uu_x dx \\ = \langle f, (1-x)u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_0^1 M(1-x)uu_x dx &\leq \|u_x\|_{L^2(0,1)}\|M(1-x)u\|_{L^2(0,1)} \leq \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2\nu}\|M(1-x)u\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{C}{\nu}\|M\|^2_{L^\infty(0,1)}\|u\|^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Luego, multiplicando la ecuación (2,3) por u, integrando con respecto a x y llevando en cuenta las identidades (2,16) y (2,17), tenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2}\|u_x\mid_{x=1}\|^2 - \int_0^1 Muu_x dx = \langle f, u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}, \tag{2.35}$$

donde

$$\int_0^1 Muu_x dx \leq \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{C}{\nu}\|M\|^2_{L^\infty(0,1)}\|u\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{2.36}$$

De (2,33), (2,34), (2,35) y (2,36) resulta que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (2-x)u^2 dx + &\frac{\nu}{2}\|u_x\mid_{x=1}\|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^1 u_x^2 dx \leq \\ &\leq \langle f, (2-x)u\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)} + \frac{2C}{\nu}\|M\|^2_{L^\infty(0,1)}\int_0^1 u^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)} + \frac{\nu}{4}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{2C}{\nu}\|M\|^2_{L^\infty(0,1)}\int_0^1 u^2 dx. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por el Teorema de Morrey, se tiene

$$\|M\|_{L^\infty(0,1)} \le \|M\|_{H^1(0,1)} \le \|M\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))} \le \|M\|_{Y_{1/4}}.$$

Luego, substituyendo la desigualdad arriba en (2,37) obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (2-x)u^2dx + \frac{\nu}{2}\|u_x\mid_{x=1}\|^2 + \frac{\nu}{4}\int_0^1 u_x^2dx \le& \\ &\le \frac{C}{\nu}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)} + \frac{2C}{\nu}\|M\|^2_{Y_{1/4}}\int_0^1 u^2dx \\ &\le \tilde{C}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)} + \frac{\tilde{C}}{2}\int_0^1 (2-x)u^2dx, \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$. Así,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{\tilde{C}t}\int_0^1 (2-x)u^2dx) + \frac{\nu}{4}e^{\tilde{C}t}\int_0^1 u_x^2dx + \frac{\nu}{2}e^{\tilde{C}t}\|u_x\mid_{x=1}\|^2 \le e^{\tilde{C}t}\|f\|^2_{H^{-1}(0,1)}. \quad (2.38)$$

De (2,38) y por el mismo argumento usado en (2,19) $-$ (2,23), se obtiene

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \le \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \quad (2.39)$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \le \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \quad (2.40)$$

$$\|u_x\mid_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \le \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \quad (2.41)$$

Finalmente, sumando las desigualdades (2,39), (2,40) y (2,41) deducimos la desigualdad (2,31).

□

2.2. Regularidad y estimativas para el caso M=0

En esta sección demostramos un resultado de regularidad para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -u_t - \nu u_{xxx} = g & \text{en } (0,T)\times(0,1) \\ u\mid_{x=0} = u\mid_{x=1} = u_x\mid_{x=0} = 0 & \text{en } (0,T) \\ u\mid_{t=T} = 0 & \text{en } (0,1) \end{cases} \quad (2.42)$$

Inicialmente, introducimos los siguientes espacios funcionales

$$X_0 = L^2(0,T:H^{-2}(0,1)); \quad X_1 = L^2(0,T:H_0^2(0,1)); \quad \tilde{X}_0 = L^2(0,T:H^{-1}(0,1))$$

$$\tilde{X}_1 = L^1(0,T:(H^3\cap H_0^2)(0,1)) \quad ; \quad Y_0 = L^2(0,T;L^2(0,1))\cap C^0([0,T];H^{-1}(0,1))$$

y

$$Y_1 = L^2(0,T;H^4(0,1)) \cap C^0([0,T];H^3(0,1)).$$

Consideraremos los espacios X_0 y X_1 unidos con las normas usuales, en cuanto que en Y_0 y Y_1 las normas serán dadas, respectivamente, por

$$\|u\|_{Y_0} := \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,1))}$$

y

$$\|u\|_{Y_1} := \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))}.$$

Lema 6. *Sea* $g \in L^2(0,T : H_0^2(0,1)) \cup L^1(0,T : (H^3 \cap H_0^2)(0,1))$. *Entonces, existe una única solución de* (2,42) *en* Y_1, *tal que*

$$\|u\|_{Y_1} + \nu^{-1/2}\|u_x \mid_{x=1} \|_{H^1(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \tag{2.43}$$

y

$$\|u\|_{Y_1} + \nu^{-1/2}\|u_x \mid_{x=1} \|_{H^1(0,T)} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))} \tag{2.44}$$

para alguna constante positiva C.

Demostración. Vamos a suponer que $g \in C^\infty([0,T] \times [0,1])$ con $g \mid_{x=0}= g \mid_{x=1}= g_x \mid_{x=0}= g_x \mid_{x=1}= 0$. Nuevamente, la conclusión de los casos $g \in L^2(0,T : H_0^2(0,1))$ y $g \in L^1(0,T : (H^3 \cap H_0^2)(0,1))$ resulta de argumentos de aproximación y densidad.

Inicialmente, aplicamos el operador $P_1 = \partial_{xxx}$ a la ecuación (2,42):

$$(P_1 u)_t + \nu P_1^2 u = -P_1 g \qquad \text{en} \quad (0,T) \times (0,1). \tag{2.45}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $-(1-x)P_1 u$ e integrando en $(0,1)$, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (1-x) \mid P_1 u \mid^2 dx - \nu\int_0^1 (1-x)P_1^2 u P_1 u dx = \int_0^1 (1-x)P_1 u P_1 g dx. \tag{2.46}$$

Por los datos de contorno y por la elección de la función g, obtenemos de (2,42) que

$$u_{3x}(t,0) = u_{3x}(t,1) = u_{4x}(t,0) = 0.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
-\nu\int_0^1(1-x)P_1uP_1^2u dx &= -\nu\int_0^1(1-x)u_{6x}u_{3x}dx\\
&= -\nu(((1-x)u_{5x}u_{3x})|_0^1-\int_0^1 u_{5x}((1-x)u_{4x}-u_{3x})dx)\\
&= \nu\int_0^1 u_{4x}((1-x)u_{4x}-u_{3x})dx\\
&= \nu((u_{5x}((1-x)u_{4x}-u_{3x})\mid_0^1+\int_0^1 u_{4x}(2u_{4x}-(1-x)u_{5x})dx)\\
&= \nu\int_0^1 u_{4x}(2u_{4x}-(1-x)u_{5x})dx)\\
&= 2\nu\int_0^1 \mid u_{4x}\mid^2 dx-\nu\int_0^1 u_{4x}(1-x)u_{5x})dx\\
&= 2\nu\int_0^1 \mid u_{4x}\mid^2 dx-\frac{\nu}{2}\int_0^1(1-x)(\mid u_{4x}\mid^2)_x dx\\
&= 2\nu\int_0^1 \mid u_{4x}\mid^2 dx-\frac{\nu}{2}(((1-x)u_{4x})\mid_0^1+\int_0^1\mid u_{4x}\mid^2 dx)\\
&= 2\nu\int_0^1 \mid u_{4x}\mid^2 dx-\frac{\nu}{2}\int_0^1\mid u_{4x}\mid^2 dx=\frac{3\nu}{2}\int_0^1\mid u_{4x}\mid^2 dx\\
&= \frac{3\nu}{2}\int_0^1\mid P_1u_x\mid^2 dx. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Multiplicando la ecuación (2,45) por $-P_1u$ e integrando en $(0,1)$ obtenemos

$$
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\mid P_1u\mid^2 dx-\nu\int_0^1 P_1uP_1^2u dx=\int_0^1 P_1uP_1g dx. \qquad (2.48)
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
-\nu\int_0^1 P_1uP_1^2u dx &= -\nu\int_0^1 u_{6x}u_{3x}dx=-\nu((u_{5x}u_{3x})\mid_0^1-\int_0^1 u_{5x}u_{4x}dx)\\
&= \nu\int_0^1 u_{5x}u_{4x}dx=\frac{\nu}{2}\int_0^1\frac{d}{dx}\mid u_{4x}\mid^2 dx\\
&= \frac{\nu}{2}\int_0^1\frac{d}{dx}\mid P_1u_x\mid^2 dx=\frac{\nu}{2}\mid P_1u_x(t,1)\mid^2\\
&= \frac{\nu}{2}(-\frac{1}{\nu}(g_x(t,0)+u_{xt}\mid_{x=1}))^2=\frac{1}{2\nu}\mid u_{xt}\mid_{x=1}\mid^2 . \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

Substituyendo (2,47) en (2,46) y (2,49) en (2,48) se obtiene, respectivamente,

$$
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1(1-x)\mid P_1u\mid^2 dx+\frac{3\nu}{2}\int_0^1\mid P_1u_x\mid^2 dx=\int_0^1(1-x)P_1uP_1g dx
$$

y

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \mid P_1 u \mid^2 dx + \frac{1}{2\nu} \mid u_{xt} \mid_{x=1}\mid^2 = \int_0^1 P_1 u P_1 g dx.$$

Sumando las identidades arriba, sigue que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (2-x) \mid P_1 u \mid^2 dx + \frac{3\nu}{2}\int_0^1 \mid P_1 u_x \mid^2 dx + \frac{1}{2\nu} \mid u_{xt} \mid_{x=1}\mid^2 =$$

$$= \int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dx. \tag{2.50}$$

Como $P_1 u \mid_{t=T} = 0$, integrando la igualdad anterior de t hasta T obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)|P_1 u|^2(t) dx + \frac{3\nu}{2}\int_t^T \int_0^1 \mid P_1 u_x(s,x) \mid^2 dxds$$

$$+ \frac{1}{2\nu}\int_t^T \mid u_{xt}(s,1) \mid^2 ds0 = \int_t^T \int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dxds. \tag{2.51}$$

Vamos a estimar el lado derecho de (2,51). Consideraremos dos casos:

Primer caso: $g \in L^2(0, T : H_0^2(0,1))$.

Como $P_1 u \mid_{x=0,1} = 0$, se obtiene

$$\int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dx = \int_0^1 g_{xx}(u_{3x} - (2-x) u_{4x}) dx = \int_0^1 g_{xx}(P_1 u - (2-x) P_1 u_x) dx.$$

La identidad anterior juntamente con las desigualdades de Hölder y Cauchy-Schwarz nos garantizan que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_t^T \int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dxds \right| \leq \int_t^T (\int_0^1 g_{xx}(2 \mid P_1 u \mid + 2 \mid P_1 u_x \mid) dx) ds \\
&\leq 2\int_t^T (\int_0^1 \mid g_{xx} \mid\mid P_1 u_x \mid dx + \int_0^1 \mid g_{xx} \mid\mid P_1 u \mid dx) ds \\
&\leq 2\int_t^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)} (\|P_1 u_x\|_{L^2(0,1)} + \|P_1 u\|_{L^2(0,1)}) ds \\
&\leq C(\int_t^T (\|P_1 u_x\|_{L^2(0,1)} + \|P_1 u\|_{L^2(0,1)})^2 ds)^{1/2} (\int_t^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds)^{1/2} \\
&\leq C(\int_t^T (\|P_1 u_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|P_1 u\|^2_{L^2(0,1)}) ds)^{1/2} \|g_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq C\|P_1 u\|_{L^2(t,T;H^1(0,1))} \|g_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|P_1 u\|^2_{L^2(t,T;H^1(0,1))} + \frac{C}{\nu}\|g_{xx}\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Segundo caso: $g \in L^1(0,T:(H^3 \cap H_0^2)(0,1))$.

Procedemos como en el caso anterior:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \int_0^1 (2-x)P_1 u P_1 g,dxds\right| &\leq 2\int_0^T (\int_0^1 |P_1 u||P_1 g|)dx)ds\\ &\leq 2\int_0^T \|P_1 u\|_{L^2(0,1)}\|P_1 g\|_{L^2(0,1)}ds\\ &\leq 2\|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\\ &\leq \frac{1}{4}\|P_1 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + 4\|P_1 g\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))},\end{aligned} \tag{2.53}$$

lo que concluye las estimativas del lado derecho de (2,51).

Inicialmente, de (2,51) y (2,52) se tiene

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)|P_1 u|^2(t)dx + \nu\int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s,x)|^2 dxds \leq$$

$$\leq \frac{\nu}{2}\int_t^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dxds + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds,$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 |P_1 u|^2(t)dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)|P_1 u|^2(t)dx + \nu\int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s,x)|^2 dxds\\ &\leq \frac{\nu}{2}\int_t^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dxds + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Luego,

$$\|P_1 u(t)\|^2_{L^2(0,1)} \leq \nu\int_t^T \|P_1 u(s)\|^2_{L^2(0,1)}ds + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds \tag{2.55}$$

y, por la desigualdad de Gronwall, concluímos que

$$\begin{aligned}\|P_1 u(t)\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\nu}(\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds)e^{\nu(T-t)} &\leq \frac{C}{\nu}(\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds)e^T\\ &\leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}ds.\end{aligned} \tag{2.56}$$

De la desigualdad de Poincaré y de (2,56), se obtiene

$$\|u(t)\|_{H^3(0,1)} \leq C\|P_1 u(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}(\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds)^{1/2} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1)},\tag{2.57}$$

y, de la desigualdad (2,57), sigue la estimativa

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}.\tag{2.58}$$

Para estimar el término de fronteira $u_x|_{x=1}$, inicialmente hacemos $t \longrightarrow 0$ en (2,51) y (2,52) :

$$\frac{1}{2\nu}\int_0^T \mid u_{xt}(s,1) \mid^2 ds \leq \frac{\nu}{2}\int_0^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds.\tag{2.59}$$

De la desigualdad (2,56) integrando desde 0 hasta T :

$$\int_0^T \|P_1 u(s)\|^2_{L^2(0,1)} ds \leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds \leq \frac{C}{\nu^2}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds\tag{2.60}$$

Luego, de (2,59) y (2,60), sigue que

$$\frac{1}{2\nu}\int_0^T \mid u_{xt}(s,1) \mid^2 ds \leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds \leq \frac{C}{\nu}\|g\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))},\tag{2.61}$$

osea,

$$\nu^{-1/2}\|u_x \mid_{x=1} \|_{H^1_0(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}.\tag{2.62}$$

Ahora, haciendo $t \longrightarrow 0$ en (2,54), por la desigualdad (2,60) se obtiene

$$\begin{aligned}\nu\int_0^T \int_0^1 |P_1 u_x(s,x)|^2 dx ds &\leq \frac{\nu}{2}\int_0^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds \\ &\leq \frac{C}{\nu}\int_0^T \|g_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} ds \leq \frac{C}{\nu}\|g\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))}.\end{aligned}$$

Así,

$$\nu^{1/2}\|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1_0(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}\tag{2.63}$$

y por la desigualdad de Poincaré obtenemos una constante $C > 0$ que satisface

$$\nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))} \leq C\nu^{1/2}\|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}. \tag{2.64}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (2,58), (2,62) y (2,64) se obtiene (2,43).

Para probar a estimativa (2,44), inicialmente combinamos (2,51) y (2,53):

$$\frac{1}{2}\|P_1 u(t)\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{4}\|P_1 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + 4\|P_1 g\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))},$$

osea,

$$\frac{1}{2}\|P_1 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq \frac{1}{4}\|P_1 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + 4\|P_1 g\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}.$$

Así,

$$\|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C\|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \tag{2.65}$$

Nuevamente, por la desigualdad de Poincaré, se obtiene

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq C\|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}, \tag{2.66}$$

esto es,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \tag{2.67}$$

De (2,51), (2,53) y (2,65) sigue la siguiente estimativa

$$\frac{3\nu}{2}\int_t^T\int_0^1 \mid P_1 u_x(s,x) \mid^2 dxds \leq C\|g\|^2_{L^1(0,T;H^3(0,1))} \tag{2.68}$$

de donde concluímos que

$$\nu^{1/2}\|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1_0(0,1))} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}, \tag{2.69}$$

cuando $t \longrightarrow 0$. Aplicando la desigualdad de Poincaré, obtenemos

$$\nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))} \leq C\nu^{1/2}\|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \tag{2.70}$$

Para estimar el termino de frontera $u_x|_{x=1}$, hacemos $t \longrightarrow 0$ en (2,51), usando la desigualdad (2,53):

$$\frac{1}{2\nu}\|u_x\ |_{x=1}\ \|^2_{H_0^1(0,T)} \leq \frac{1}{4}\|P_1 u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + 4\|P_1 g\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.71}$$

Luego, por la desigualdad (2,65) resulta que

$$\nu^{-1/2}\|u_x\ |_{x=1}\ \|_{H_0^1(0,T)} \leq C\|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))} \tag{2.72}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (2,67), (2,70) y (2,72) obtenemos (2,44).

□

2.3. Estimativas de los términos de frontera para el caso M = 0

2.3.1. Argumentos de interpolación

Introducimos los espacios funcionales

$$\begin{gathered}
X_{1/4} = L^2(0,T : H^{-1}(0,1)) \quad ; \quad \tilde{X}_{1/4} = L^1(0,T : L^2(0,1)) \\
X_\theta = (X_1, X_{1/4})_{[\theta]} = L^2(0,T; H^{2-3\theta}(0,1) \\
\tilde{X}_\theta = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_{1/4})_{[\theta]} = L^1(0,T; H^{3(1-\theta)} \cap H_0^{2(1-\theta)}(0,1)) \\
Y_{1/4} = L^2(0,T; H^1(0,1)) \cap C^0([0,T]; L^2(0,1))
\end{gathered} \tag{2.73}$$

y

$$Y_\theta = (Y_1, Y_{1/4})_{[\theta]} = L^2(0,T; H^{4-3\theta}(0,1)) \cap C^0([0,T]; H^{3(1-\theta)}(0,1)) \tag{2.74}$$

para todo $\theta \in [0,1]$.

Consideraremos los espacios $X_{1/4}$ y $\tilde{X}_{1/4}$ unido con las normas usuales, en cuanto que en $Y_{1/4}$ la norma será dada por

$$\|u\|_{Y_{1/4}} = \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}.$$

Definimos la siguiente aplicación lineal

$$A : g \quad \longmapsto \quad u$$

donde u y g son dadas en (2,42). Por los Lemas 4 y 6 tenemos que A aplica de manera continua $X_{1/4}$ en $Y_{1/4}$ y X_1 en Y_1. Además, existe una constante positiva C, tal que

$$\|Ag\|_{Y_{1/4}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{X_{1/4}} \quad ; \quad \|Ag\|_{Y_1} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{X_1}.$$

Entonces, $A \in \mathcal{L}(X_{1/4}; Y_{1/4}) \cap \mathcal{L}(X_1; Y_1)$ y

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X_{1/4};Y_{1/4})} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \quad ; \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X_1;Y_1)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}. \tag{2.75}$$

Análogamente, se obtiene que A aplica de manera continua $\tilde{X}_{1/4}$ en $Y_{1/4}$ y $\tilde{X}_1$ en Y_1. Además, existe una constante postiva C, tal que

$$\|Ag\|_{Y_{1/4}} \leq C\|g\|_{\tilde{X}_{1/4}} \quad ; \quad \|Ag\|_{Y_1} \leq C\|g\|_{\tilde{X}_1}.$$

Entonces, $A \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; Y_{1/4}) \cap \mathcal{L}(\tilde{X}_1; Y_1)$ y

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4};Y_{1/4})} \leq C \quad ; \quad \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1;Y_1)} \leq C. \tag{2.76}$$

Utilizando argumentos clásicos de interpolación, obtenemos de (2,75) y (2,76) que A aplica de manera continua X_θ y $\tilde{X}_\theta$ en Y_θ, para todo $\theta \in [0,1]$, respectivamente. Además, la norma del operador A satisface

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X_\theta;Y_\theta)} \leq C\|A\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_1;Y_1)}\|A\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_{1/4};Y_{1/4})} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \tag{2.77}$$

y

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_\theta;Y_\theta)} \leq C\|A\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1;Y_1)}\|A\|^{\theta}_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4};Y_{1/4})} \leq C, \tag{2.78}$$

para todo $\theta \in [0,1]$.

Consideremos ahora la siguiente aplicación lineal

$$B : g \longmapsto u_x|_{x=1}.$$

Nuevamente, por los Lemas 4 y 6 tenemos que B aplica de manera continua $X_{1/4}$ en $L^2(0,T)$ y X_1 en $H^1(0,T)$, respectivamente. Además, existe una constante positiva C, tal que

$$\|Bg\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\nu}\|g\|_{X_{1/4}} \quad ; \quad \|Bg\|_{H^1(0,T)} \leq C\|g\|_{X_1}.$$

Entonces, $B \in \mathcal{L}(X_{1/4}; L^2(0,T)) \cap \mathcal{L}(X_1; H^1(0,T))$ y

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X_{1/4};L^2(0,T))} \leq \frac{C}{\nu} \quad ; \quad \|B\|_{\mathcal{L}(X_1;H^1(0,T))} \leq C. \tag{2.79}$$

De la misma manera, B aplica de manera continua $X_{1/4}$ en $L^2(0,T)$ y X_1 en $H^1(0,T)$. Además, existe una constante positiva C, tal que

$$\|Bg\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|g\|_{\tilde{X}_{1/4}} \quad ; \quad \|Bg\|_{H^1(0,T)} \leq C\nu^{1/2}\|g\|_{\tilde{X}_1}.$$

Luego, $B \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; L^2(0,T)) \cap \mathcal{L}(\tilde{X}_1; H^1(0,T))$ y

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4};L^2(0,T))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \quad ; \quad \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1;H^1(0,T))} \leq C\nu^{1/2}. \tag{2.80}$$

Por argumentos de interpolación, de (2,79) y (2,80) obtenemos que B aplica de manera continua X_θ y $\tilde{X}_\theta$ en $H^{1-\theta}(0,T)$ para todo $\theta \in [0,1]$. Además, existe una constante positiva C, tal que

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X_\theta;H^{1-\theta}(0,T))} \leq C\|B\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_1;H^1(0,T))}\|B\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_{1/4};L^2(0,T))} \leq C\nu^{-\theta} \tag{2.81}$$

y

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_\theta;H^{1-\theta}(0,T))} \leq C\|B\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1;H^1(0,T))}\|B\|^{\theta}_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4};L^2(0,T))} \leq C\nu^{(1-2\theta)/2}, \tag{2.82}$$

para todo $\theta \in [0,1]$.

2.3.2. Estimativas de los términos frontera

En esta sección vamos a obtener estimativas para los términos de frontera $u|_{t=0}$, $u_x|_{x=1}$, $u_{xx}|_{x=0}$ e $u_{xx}|_{x=1}$. Comenzamos probando el siguiente resultado:

Lema 7. *Sea $g \in L^2(0,T;L^2(0,1)) \cup L^1(0,T;H^1_0(0,1))$. Entonces, existe una constante positiva C, tal que*

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq \begin{cases} C\nu^{-1/2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}, \end{cases} \tag{2.83}$$

donde u es solución de (2,42).

Demostración. Para $\theta = 2/3$ en (2,73), se tiene que $g \in X_{2/3} = L^2(0,T : L^2(0,1))$. Luego, en la desigualdad (2,77) obtenemos

$$A \in \mathcal{L}(X_{2/3}; Y_{2/3}) \quad \text{y} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X_{2/3};Y_{2/3})} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}.$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{Y_{2/3}} = \|Ag\|_{Y_{2/3}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X_{2/3};Y_{2/3})} \|g\|_{X_{2/3}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_{2/3}}. \tag{2.84}$$

En (2,81), para $\theta = 2/3$, se tiene que

$$B \in \mathcal{L}(X_{2/3}; H^{1/3}(0,T)) \quad \text{y} \quad \|B\|_{\mathcal{L}(X_{2/3};H^{1/3}(0,T))} \leq C\nu^{-2/3}.$$

Así,

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T))} = \|Bg\|_{H^{1/3}(0,T))} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X_{2/3};H^{1/3}(0,T))} \|g\|_{X_{2/3}} \leq C\nu^{-2/3} \|g\|_{X_{2/3}}. \tag{2.85}$$

Sea $\widehat{X}_{2/3} = L^1(0,T; H_0^1(0,1))$. Como $H_0^1(0,1) \hookrightarrow H^1(0,1) \cap H_0^{2/3}(0,1)$, obtenemos que

$$\widehat{X}_{2/3} = L^1(0,T; H_0^1(0,1)) \hookrightarrow L^1(0,T; H^1(0,1) \cap H_0^{2/3}(0,1)) = \tilde{X}_{2/3}.$$

Entonces, para $\theta = 2/3$, en (2,78) se obtiene

$$A \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; Y_{2/3}) \quad \text{y} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3};Y_{2/3})} \leq C,$$

de donde

$$\|u\|_{Y_{2/3}} = \|Ag\|_{Y_{2/3}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3};Y_{2/3})} \|g\|_{\tilde{X}_{2/3}} \leq C\|g\|_{\widehat{X}_{2/3}}. \tag{2.86}$$

Análogamente, se tiene en (2,82) que $B \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; H^{1/3}(0,T))$ y

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3};H^{1/3}(0,T))} \leq C\nu^{-1/6}.$$

Así,

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T))} = \|Bg\|_{H^{1/3}(0,T))} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3};H^{1/3}(0,T))} \|g\|_{\tilde{X}_{2/3}} \leq C\nu^{-1/6} \|g\|_{\widehat{X}_{2/3}}. \tag{2.87}$$

Como $\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1))} \leq C\|u\|_{Y_{2/3}}$, resulta de las desigualdades (2,84) y (2,86) que

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1))} \leq \begin{cases} \dfrac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_{2/3}} \\ \\ C\|g\|_{\widehat{X}_{2/3}}. \end{cases} \tag{2.88}$$

De (2,85) y (2,87) obtenemos

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T))} \leq \begin{cases} C\nu^{-2/3}\|g\|_{X_{2/3}} \\ \\ C\nu^{-1/6}\|g\|_{\widehat{X}_{2/3}}. \end{cases} \tag{2.89}$$

Resta apenas probar que $u_{xx}|_{x=1}$, $u_{xx}|_{x=0} \in L^2(0,T)$. Probaremos una estimativa para $u_{xx}|_{x=0}$ (lo mismo puede ser hecho para $u_{xx}|_{x=1}$). Vamos a introducir una función $\rho \in C^3([0,1])$ que satisface $\rho|_{[0,1/2]} = 1$, $\rho|_{[3/4,1]} = 0$ y consideremos

$$\widehat{u} = \rho u.$$

La función $\widehat{u}$ satisface

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t + \nu\widehat{u}_{xxx} &= \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx}u_x + \rho_{xxx}u) + \rho(u_t + \nu u_{xxx}) \\ &= \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx}u_x + \rho_{xxx}u) - \rho g. \end{aligned}$$

Multiplicando la igualdad arriba por $-\widehat{u}_{xx}$, integrando en $(0,1)$ y observando que

$$-\int_0^1 \widehat{u}_{xxx}\widehat{u}_{xx}dx = -\frac{1}{2}|\widehat{u}_{xx}|^2|_0^1 = \frac{1}{2}|u_{xx}|_{x=0}|^2$$

y

$$-\int_0^1 \widehat{u}_t\widehat{u}_{xx}dx = \int_0^1 \widehat{u}_x\widehat{u}_{tx}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\widehat{u}_x|^2dx$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\widehat{u}_x|^2dx + \frac{\nu}{2}|u_{xx}|_{x=0}|^2 = -\int_0^1 \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx}u_x + \rho_{xxx}u)\widehat{u}_{xx} + \int_0^1 \rho g\widehat{u}_{xx}dx. \tag{2.90}$$

Como ρ, ρ_x y ρ_{xx} son limitadas, sigue que

$$\left|\int_0^T \int_0^1 \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx}u_x + \rho_{xxx}u)(\rho_{xx}u + 2\rho_x u_x + \rho u_{xx})dxds\right| \leq$$

$$\leq C\nu\left\{\int_0^T \int_0^1 (|u_{xx}|^2 + |u_x|^2 + |u|^2)dxds + \int_0^T \int_0^1 (|uu_x| + |u_x u_{xx}| + |uu_{xx}|)dxds\right\}$$

$$\leq C\nu\int_0^T \int_0^1 (|u_{xx}|^2 + |u_x|^2 + |u|^2)dxds = C\nu\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \tag{2.91}$$

y

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_0^1 |\widehat{u}_x|^2 dxds = -\frac{1}{2}\int_0^1 (|\widehat{u}_x(T,x)|^2 - |\widehat{u}_x(0,x)|^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 |\widehat{u}_x(0,x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 |\rho_x u(0,x) + \rho u_x(0,x)|^2 dx$$

$$\leq C\int_0^1 (|u(0,x)|^2 + |u_x(0,x)|^2)dx$$

$$\leq C \sup_{t\in[0,T]} \left\{\int_0^1 (|u(t,x)|^2 + |u_x(t,x)|^2)dx\right\} =$$

$$= C\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.92}$$

Así, integrando (2,90) de 0 hasta T y usando (2,91) y (2,92) obtenemos

$$\frac{\nu}{2}\int_0^T |u_{xx}|_{x=0}|^2 ds \leq C(\nu\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}) + \left|\int_0^T\int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dxds\right|. \tag{2.93}$$

En la secuencia, estimaremos el último término de la desigualdad de (2,93). Consideremos dos casos:

Primer caso: $g \in X_{2/3}$

$$\int_0^T\int_0^1 |g\widehat{u}_{xx}|dxds = \int_0^T\int_0^1 |g(\rho_{xx}u + 2\rho_x u_x + \rho u_{xx})|dxds$$

$$\leq C\int_0^T\int_0^1 (|gu| + |gu_x| + |gu_{xx})|)dxds$$

$$= C\int_0^T\int_0^1 \frac{\nu^{1/2}}{\nu^{1/2}}(|gu| + |gu_x| + |gu_{xx})|)dxds$$

$$\leq C\int_0^T\int_0^1 \left\{\left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u|^2}{2}\right) + \left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u_x|^2}{2}\right) + \left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u_{xx}|^2}{2}\right)\right\} dxds$$

$$= C(\nu^{-1}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \nu\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))}). \tag{2.94}$$

Segundo caso: $g \in \widehat{X}_{2/3}$.

Como

$$0=\int_0^T \rho g\widehat{u}_x|_0^1 ds=\int_0^T\int_0^1 \rho g\widehat{u}_{xx}dxds+\int_0^T\int_0^1(\rho_x g+\rho g_x)\widehat{u}_x dxds,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_0^1 \rho g\widehat{u}_{xx}dxds\right| &= \left|\int_0^T\int_0^1(\rho_x g+\rho g_x)\widehat{u}_x dxds\right|\\ &= \left|\int_0^T\int_0^1(\rho_x g+\rho g_x)(\rho_x u+\rho u_x)dxds\right|\\ &\leq C\int_0^T\left(\int_0^1(|gu|+|g_x u|+|gu_x|+|g_x u_x|)dx\right)ds\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|g\|_{L^2(0,1)}\|u\|_{L^2(0,1)}ds &\leq \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2(0,1)}\int_0^T\|g\|_{L^2(0,1)}ds\\ &\leq C\left\{(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2(0,1)})^2+(\int_0^T\|g\|_{L^2(0,1)}ds)^2\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}+\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}\right\}.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|g_x\|_{L^2(0,1)}\|u\|_{L^2(0,1)}ds &\leq C\left\{(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2(0,1)})^2+(\int_0^T\|g_x\|_{L^2(0,1)}ds)^2\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}+\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}\right\}\end{aligned}$$

y

$$\int_0^T \|g_x\|_{L^2(0,1)}\|u_x\|_{L^2(0,1)}ds\leq C\left\{\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}+\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^T\int_0^1 \rho g\widehat{u}_{xx}dxds\right|\leq C\left\{\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}+\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}\right\}. \tag{2.95}$$

De las desigualdades (2,93), (2,94) y (2,95) obtenemos dos estimativas:

$$\frac{\nu}{2}\|u_{xx}|_{x=0}\|^2_{L^2(0,T)} \leq C(\nu\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}) \quad +$$

$$+\begin{cases} C\left(\nu^{-1}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \nu\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))}\right) \\ \\ C\left\{\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))} + \|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}\right\}, \end{cases} \tag{2.96}$$

esto es,

$$\|u_{xx}|_{x=0}\|^2_{L^2(0,T)} \leq C\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + C\nu^{-1}\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))} \quad +$$

$$+\begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ \dfrac{C}{\nu}\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases} \tag{2.97}$$

Introduciendo la siguiente norma en $Y_{2/3}$

$$\|u\|_{Y_{2/3}} := \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}$$

obtenemos

$$\|u_{xx}|_{x=0}\|^2_{L^2(0,T)} \leq C\nu^{-1}\|u\|^2_{Y_{2/3}} \quad + \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\nu^{-1}\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases} \tag{2.98}$$

Por otro lado, de las desigualdes (2,84) y (2,86) se tiene

$$C\nu^{-1}\|u\|^2_{Y_{2/3}} \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\nu^{-1}\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}, \end{cases}$$

lo que nos garantiza que

$$\|u_{xx}|_{x=0}\|^2_{L^2(0,T)} \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\nu^{-1}\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases} \tag{2.99}$$

Para estimar el término $u_{xx}|_{x=1}$ procedemos de manera análoga y obtenemos

$$\|u_{xx}|_{x=1}\|^2_{L^2(0,T)} \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\nu^{-1}\|g\|^2_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases} \tag{2.100}$$

Finalmente, de las desigualdades (2,88), (2,89), (2,99) y (2,100) tenemos

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq \begin{cases} C\nu^{-1/2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ \\ C\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases}$$

□

2.3.3. Algunas conclusiones: existencia de solución y su dependencia en relación a las condiciones iniciales y términos de frontera

Observe que la solución u del sistema (2.3) resuelve el sistema (2.42) cuando

$$g := f - M(t,x)u_x.$$

Si $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, por los Lemas 4 y 5 resulta que $u_x \in L^2(0,T;L^2(0,1))$. Por lo tanto, $g = f - M(t,x)u_x \in L^2(0,T;L^2(0,1))$. Luego, de la desigualdad (2,83) obtenemos la siguiente estimativa

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq C\nu^{-1/2}\|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.101}$$

Ahora, si $f \in L^1(0,T;H^1_0(0,1))$, podemos considerar u solución de (2,3) como $u = u_1 + u_2$ siendo u_1 solución de (2,42) con $g_1 = f$ y u_2 solución de (2,42) con $g_2 = -M(t,x)u_x \in L^2(0,T;L^2(0,1))$. Usando las estimativas en (2,83) y la desigualdad triangular sigue que

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq C\nu^{-1/2}\|g_2\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + C\|g_1\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}$$

$$= C\nu^{-1/2}\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + C\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.102}$$

Vamos a estimar el lado derecho de (2,101) e (2,102). Consideremos dos casos:

Primer caso: M es constante

Si $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, entonces por el Lema 4 se obtiene

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq C\nu^{-1/2}\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.103}$$

Substituyendo (2,103) en (2,101) concluímos que

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)}+\nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)}+\nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}+\nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq C\nu^{-1/2}\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}+C\nu^{-1/2}\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}$$

$$\leq C\nu^{-1}\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.104}$$

Sea ahora $f \in L^1(0,T;H_0^1(0,1))$. Nuevamente, por el Lema 4 obtenemos la siguiente desigualdad

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq C\nu^{-1/2}\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.105}$$

Consecuentemente, por (2,102) tenemos

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)}+\nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)}+\nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}+\nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq C\nu^{-1}\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}+C\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}$$

$$\leq C\nu^{-1}\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.106}$$

Segundo caso: M es variable

Por argumentos clásicos de interpolación obtemos el siguiente espacio:

$$L^2(0,T;H^{7/4}(0,1)) = [L^2(0,T;H^2(0,1)), L^2(0,T;H^1(0,1))]_{[1/4]},$$

tal que

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} \leq C\|u\|^{3/2}_{L^2(0,T;H^2(0,1))}\|u\|^{1/2}_{L^2(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.107}$$

Dado $\delta > 0$, de (2,107) y por la desigualdad de Young obtenemos una constante positiva C_δ satisfaciendo

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} \leq \sqrt{\delta^2\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,1))}+C_\delta^2\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,1))}}$$

$$\leq \delta\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}+C_\delta\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.108}$$

Sea $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, entonces por la desigualdad (2,84) obtenemos

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \leq C\nu^{-1/2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} = C\nu^{-1/2}\|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}$$

$$\leq C\nu^{-1/2}\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}\right). \tag{2.109}$$

De las desigualdades (2,108) y (2,109) sigue que

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}$$

$$\leq C\|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}$$

$$\leq C\|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))}$$

$$\leq C\|M\|_{Y_{1/4}}\left\{\delta C\nu^{-1/2}\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}\right) + C_\delta\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}\right\}$$

$$\leq \tilde{C}\delta\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C}\delta\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C}C_\delta\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}, \tag{2.110}$$

donde $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$.

Considerando $\delta > 0$, tal que $1 - \tilde{C}\delta > 0$, por el Lema 5 se obtiene de la desigualdad anterior, una constante positiva $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$ que satisface

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.111}$$

Así, de las desigualdades (2,101) y (2,111) sigue que

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}$$

$$\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.112}$$

Si $f \in L^1(0,T;H_0^1(0,1))$, por la desigualdad (2,86) y por el Lema 5 obtenemos, respectivamente, dos estimativas:

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \tag{2.113}$$

y

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \tag{2.114}$$

Por lo tanto, combinando (2,103), (2,113) y (2,114) se obtiene

$$\begin{aligned}
\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} &\leq \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq C\|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \\
&\leq C\|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} \\
&\leq C\|M\|_{Y_{1/4}}\left\{\delta\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + C_\delta\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}\right\} \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

De las desigualdades (2,102) y (2,115) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)}+&\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}},\nu)\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Finalmente, las siguientes proposiciones son consecuencia del Teorema de Riesz. De hecho, el lado derecho de (2,2) define un funcional lineal continuo que asocia $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ al valor correspondiente en $\mathbb{R}$. Por los resultados probados anteriormente, este funcional es continuo en $L^2(0,T;L^2(0,1))$, $L^1(0,T;H^1_0(0,1))$. Luego, por el Teorema de Riesz, obtenemos los siguientes teoremas:

Proposición 18. *Supongamos que M sea una constante. Sean $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, $v_1 \in L^2(0,T)$, $v_2 \in L^2(0,T)$ y $v_3 \in H^{-1/3}(0,T)$. Entonces, existe una única solución $y \in Y_0$ del sistema (2,1), tal que*

$$\|y\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq \frac{C}{\nu}(\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \tag{2.117}$$

y

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,1))} \leq \frac{C}{\nu}(\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \tag{2.118}$$

para alguna constante positiva C independiente de y_0, v_1, v_2 y v_3.

Proposición 19. *Consideremos* $M \in Y_{1/4}$. *Sean* $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, $v_1 \in L^2(0,T)$, $v_2 \in L^2(0,T)$ *y* $v_3 \in H^{-1/3}(0,T)$. *Entonces, existe una única solución* $y \in Y_0$ *del sistema* (2,1), *tal que*

$$\|y\|_{Y_0} \leq C(\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \tag{2.119}$$

para alguna constante positiva C *dependiendo de* ν *y* $\|M\|_{Y_{1/4}}$, *pero independiente de* y_0, v_1, v_2 *y* v_3.

Capítulo 3

Teoremas principales

3.1. Desigualdad de Carleman

Sea M una constante. Consideremos el siguiente sistema adjunto asociado al sistema (2.1)

$$\begin{cases} -\varphi_t - \nu\varphi_{xxx} - M\varphi_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,1) \\ \varphi\mid_{x=0} = \varphi\mid_{x=1} = \varphi_x\mid_{x=0} = 0 & \text{en } (0,T) \\ \varphi\mid_{t=T} = \varphi_0 & \text{en } (0,1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Haciendo el cambio de variable $t \to \nu t$, el sistema (3,1) puede ser escrito como

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xxx} - \dfrac{M}{\nu}\varphi_x = 0 & \text{en } (0,T_0)\times(0,1) = Q_0 \\ \varphi\mid_{x=0} = \varphi\mid_{x=1} = \varphi_x\mid_{x=0} = 0 & \text{en } (0,T_0) \\ \varphi\mid_{t=T_0} = \varphi_0 & \text{en } (0,1). \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $T_0 = \nu T$. Trabajamos con esta ecuación para que la desigualdad de Carleman sea más clara. Antes de enunciar el siguiente resultado, consideremos la función peso

$$\alpha(t,x) = \frac{100 + 4x - x^2}{t^{1/2}(T_0 - t)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para todo } (t,x) \in Q_0.$$

Las funciones de esta clase fueron introducidas por primera vez por Fursikov e Imanuvilov en [14]. Denotamos

$$\tilde{\alpha}(t) := \min_{x\in[0,1]}\{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,0) \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}(t) := \max_{x\in[0,1]}\{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,1).$$

Observe que la función α satisface las siguientes propiedades:

$$C \le T_0\alpha, \quad C_0\alpha \le \alpha_x \le C_1\alpha, \quad C_0\alpha \le -\alpha_{xx} \le C_1\alpha \quad \text{en}(0,T_0)\times(0,1)$$

$$|\alpha_t| + |\alpha_{xt}| + |\alpha_{xxt}| \le CT_0\alpha^3, \qquad \text{en } (0,T_0)\times(0,1)$$
$$|\alpha_{tt}| \le C(T_0^2\alpha^5 + \alpha^3) \le CT_0^2\alpha^5 \qquad \text{en } (0,T_0)\times(0,1)$$

y

$$64\tilde{\alpha} - 62\hat{\alpha} = \frac{14}{(t(T_0-t))^2} > 0,$$

donde C, C_0 y C_1 son constantes positivas independientes de T_0. Vamos a usar la siguiente proposición, que no será demostrada:

Proposición 20. *Existe una constante positiva C, independiente de T_0, ν y M, tal que, para cada $\varphi_0 \in L^2(0,1)$ la solución φ de (3,2) satisface*

$$\iint_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \le C\int_0^{T_0} \alpha\,|_{x=0}\, e^{-2s\alpha|_{x=0}}\,|\varphi_{xx}\,|_{x=0}|^2\,dt, \tag{3.3}$$

para todo $s \ge C(T_0 + T_0^{\frac{1}{2}} + T_0|M|^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}})$.

3.2. Resultados Principales

Sea $\nu > 0$ fijo. El siguiente teorema es un resultado de controlabilidad nula para la ecuación (2,1), cuando M es constante.

Teorema 15. *Sea M una constante y $\nu > 0$ fijo. Entonces, para cada $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, existe $v_1 \in L^2(0,T)$, tal que la solución $y \in Y_0$ de (2,1) con datos $v_2 = v_3 = 0$ satisface $y|_{t=T} = 0$ en $(0,1)$. Además, para cada $\nu \in (0,1)$, existe $C^* > 0$, tal que*

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \le \frac{C^*}{\nu}\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \tag{3.4}$$

Por otro lado, para ν suficientemente pequeño (en terminos de M solamente), obtenemos

$$C^* = exp\left\{\frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)\right\}, \tag{3.5}$$

donde $\tilde{C}$ es una constante independiente de M, ν y y_0.

Demostración. En primer lugar, vamos a deducir una desigualdad de observabilidad utilizando la desigualdad de Carleman (3,3).

Sea φ solución de (3,1). Haciendo el cambio de variable $t \to \nu t$ (recordemos que $T_0 = \nu T$), podemos considerar una solución de (3,2) y aplicar la desigualdad (3,3) como sigue:

$$s^2\iint_{Q_0} \alpha^3 e^{-2s\alpha}|\varphi_x|^2\,dxdt \le C\int_0^{T_0} \alpha(t,0)e^{-2s\alpha(t,0)}|\varphi_{xx}(t,0)|^2\,dt, \tag{3.6}$$

para alguna constante positiva C independiente de T_0, ν y M. Por la definición de α sigue que

$$\frac{s^2}{T_0^3}e^{-C_2 s/T_0}\iint_{\tilde{Q}_0}|\varphi_x|^2\,dxdt\leq\frac{C_3}{T_0}e^{-C_3 s/T_0}\int_0^{T_0}|\varphi_{xx}(t,0)|^2\,dt,\tag{3.7}$$

donde $\tilde{Q}_0$ es un intervalo compacto contenido en Q_0, C_2 y C_3 son constantes positivas. En efecto, $\tilde{\alpha}$ y $\hat{\alpha}$ alcanzan mínimo en $T_0/2$, $\text{máx}_{t\in[T_0/3,2T_0/3]}\{\hat{\alpha}(t)\}=\hat{\alpha}(T_0/3)=C_2^*/T_0$, donde $C_2^*>200$. Luego,

$$400/T_0\leq 2\tilde{\alpha}(t)\leq 2\alpha(t,x)\leq 2\hat{\alpha}(t)\leq 2C_2^*/T_0=C_2/T_0$$

para todo $(t,x)\in[\frac{T_0}{3},\frac{2T_0}{3}]\times[0,1]$. Así,

$$\frac{(400)^3}{T_0{}^3}s^2e^{-C_2/T_0}\int_{\frac{T_0}{3}}^{\frac{2T_0}{3}}\int_0^1|\varphi_x|^2\,dxdt\leq s^2\iint_{Q_0}\alpha^3e^{-2s\alpha}|\varphi_x|^2\,dxdt.\tag{3.8}$$

Definimos $f(t)=\alpha(t,0)e^{-2s\alpha(t,0)}$ en $(0,T_0)$. Entonces, f alcanza el máximo en $T_0/2$. Luego,

$$\int_0^{T_0}\alpha(t,0)e^{-2s\alpha(t,0)}|\varphi_{xx}(t,0)|^2\,dt\leq\int_0^{T_0}f\left(\frac{T_0}{2}\right)|\varphi_{xx}(t,0)|^2\,dt$$

$$=\frac{(200)}{T_0}e^{-400s/T_0}\int_0^{T_0}|\varphi_{xx}(t,0)|^2\,dt.\tag{3.9}$$

Combinando las desigualdades (3,6), (3,8) y (3,9) obtenemos (3,7).

Afirmación: Existe $C>0$, tal que

$$\int_0^1|\varphi_x(t_1,x)|^2dx\leq\frac{C}{\nu^{4/3}}\int_0^1|\varphi_x(t_2,x)|^2dx,\qquad 0\leq t_1\leq t_2\leq T.\tag{3.10}$$

En efecto, como φ es solución de (3,2), de la desigualdad (2,19) (con $f=0$) obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{Ct}\int_0^1(2-x)\varphi^2dx)\leq 0.$$

Integrando la desigualdad anterior de t_1 hasta t_2 se obtiene

$$\int_0^1|\varphi(t_1,x)|^2dx\leq e^{Ct_1}\int_0^1(2-x)\varphi^2(t_1,x)dx\leq e^{Ct_2}\int_0^1(2-x)\varphi^2(t_2,x)dx$$

$$\leq 2e^{CT}\int_0^1\varphi^2(t_2,x)dx$$

$$\leq C\int_0^1|\varphi(t_2,x)|^2dx.\tag{3.11}$$

Definimos el operador $P_2 := \nu\partial_{xxx} + M\partial_x$. Como

$$\frac{d}{dt}|P_2\varphi|^2 = 2(\nu\varphi_{3x} + M\varphi_x)(\nu\varphi_{3xt} + M\varphi_{xt}), \tag{3.12}$$

multiplicando a la ecuación (3,1) por $-P_2\varphi_t$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$\varphi_t(\nu\varphi_{3xt} + M\varphi_{xt}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|P_2\varphi|^2 = 0. \tag{3.13}$$

Observe que

$$\nu\int_0^1 \varphi_t\varphi_{3xt}dx = -\nu\int_0^1 \varphi_{xt}\varphi_{xxt}dx = \frac{-\nu}{2}\int_0^1 |\varphi_{xt}|_x^2 dx = \frac{-\nu}{2}|\varphi_{xt}|^2(t,1), \tag{3.14}$$

y

$$M\int_0^1 \varphi_t\varphi_{xt}dx = \frac{M}{2}\int_0^1 |\varphi_t|_x^2 dx = \frac{1}{2}|\varphi_t|^2|_0^1 = 0. \tag{3.15}$$

Integrando (3,13) con respecto a x y usando las identidades (3,14) y (3,15) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |P_2\varphi|^2 dx = \frac{\nu}{2}|\varphi_{xt}(t,1)|^2. \tag{3.16}$$

Consecuentemente,

$$\int_0^1 |P_2\varphi(t_1,x)|^2 dx \leq \int_0^1 |P_2\varphi(t_2,x)|^2 dx. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, por la definición del operador P_2 sigue la estimativa

$$\int_0^1 |\nu\varphi_{3x}(t_1,x)|^2 dx = \int_0^1 |P_2\varphi(t_1,x) - M\varphi_x(t_1,x)|^2 dx$$

$$\leq 2\int_0^1 |P_2\varphi(t_1,x)|^2 + 2\int_0^1 |M\varphi_x(t_1,x)|^2 dx. \tag{3.18}$$

Ahora, usando el Teorema de las derivadas intermedias, obtenemos una constante positiva C satisfaciendo

$$\int_0^1 |M\varphi_x(t_1,x)|^2 dx \leq \frac{\nu^2}{4}\int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1,x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2}\int_0^1 |\varphi(t_1,x)|^2 dx. \tag{3.19}$$

Como $\varphi(t_2,.) \in \mathcal{S} = \{u \in H^3(0,1) : u(0) = u(1) = u_x(0) = 0\}$, por la desigualdad de Poincaré sigue que

$$\|\varphi(t_2,.)\|_{H^3(0,1)} \leq C\|\varphi_{3x}(t_2,.)\|_{L^2(0,1)}. \tag{3.20}$$

Luego,

$$\int_0^1 |\varphi(t_2,x)|^2 dx \leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 |\varphi_x(t_2,x)|^2 dx \leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx. \tag{3.21}$$

Por lo tanto, de la definición del operador P_2 y por la desigualdad (3,21) obtenemos

$$\int_0^1 |P_2\varphi(t_2,x)|^2 dx \leq 2\nu^2 \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx + 2\int_0^1 |\varphi_x(t_2,x)|^2 dx$$

$$\leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx. \tag{3.22}$$

Combinando las desigualdades (3,17), (3,18) y (3,19) resulta que

$$\frac{\nu^2}{2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1,x)|^2 dx \leq 2 \int_0^1 |P_2\varphi(t_2,x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi(t_1,x)|^2 dx \tag{3.23}$$

Por outro lado, de las desigualdades (3,11), (3,21) y (3,22) obtenemos en la desigualdade arriba la siguiente estimativa:

$$\frac{\nu^2}{2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1,x)|^2 dx \leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx$$

$$\leq \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx,$$

osea,

$$\int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^4} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2,x)|^2 dx. \tag{3.24}$$

Para concluir la demonstración de la desigualdad (3,10), definimos la siguiente aplicación

$$A : \varphi(t_2,.) \quad \longmapsto \quad \varphi(t_1,.)$$

Resulta de la desigualdad (3,11) que $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1); L^2(0,1))$ y

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))} \leq C. \tag{3.25}$$

Como $\varphi(t_1,.) \in \mathcal{S} = \{u \in H^3(0,1) : u(0) = u(1) = u_x(0) = 0\}$, por la desigualdad de Poincaré y por la desigualdad (3,24) sigue que

$$\|\varphi(t_1,.)\|_{H^3(0,1)} \leq C\|\varphi_{3x}(t_1,.)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^2}\|\varphi_{3x}(t_2,.)\|_{L^2(0,1)}. \tag{3.26}$$

Luego, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})$ y

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\nu^2}. \tag{3.27}$$

Por argumentos clásicos de interpolación tenemos que

$$A \in \mathcal{L}\left((\mathcal{S}, L^2(0,1))_{[\theta]}; (\mathcal{S}, L^2(0,1))_{[\theta]}\right),$$

y

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left((\mathcal{S},L^2(0,1))_{[\theta]};(\mathcal{S},L^2(0,1))_{[\theta]}\right)} \leq C\|A\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})}\|A\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))}$$

para todo $\theta \in [0,1]$. En particular, para $\theta = \dfrac{2}{3}$ resulta que $A \in \mathcal{L}(H_0^1(0,1), H_0^1(0,1))$ y por las desigualdades (3,25) y (3,27) obtenemos la siguiente estimativa:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_0^1(0,1),H_0^1(0,1))} \leq C\|A\|^{1/3}_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})}\|A\|^{2/3}_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{2/3}}. \tag{3.28}$$

Luego,

$$\|A\varphi(t_2,.)\|_{H_0^1(0,1)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H_0^1(0,1),H_0^1(0,1))}\|\varphi(t_2,.)\|_{H_0^1(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^{2/3}}\|\varphi(t_2,.)\|_{H_0^1(0,1)}, \tag{3.29}$$

lo que nos garantiza que

$$\int_0^1 |\varphi_x(t_1,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}}\int_0^1 |\varphi_x(t_2,x)|^2 dx, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T,$$

demonstrando la desigualdad (3,10).

Vamos a suponer que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx \leq C^* \int_0^T |\varphi_{xx}(t,0)|^2 \, dt, \tag{3.30}$$

donde

$$C^* = exp\left\{\frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)\right\} \tag{3.31}$$

para alguna constante positiva $\tilde{C}$, que depende de T, con ν suficientemente pequeño en terminos de M.

Sea φ solución del problema adjunto (3,1). Multiplicando la ecuación (2,1) por φ e integrando por partes en $(0,T)\times(0,1)$, obtenemos

$$\int_0^1 (y(T,x)\varphi_0 - y_0\varphi_1)dx - \nu\int_0^T v_1\varphi_{xx}(t,0)dt = 0, \tag{3.32}$$

donde $\varphi_1 = \varphi(0,.) \in H_0^1(0,1)$ y $v_1 \in L^2(0,T)$. Esa identidade nos dice que el dato inicial $y_0 \in H^{-1}(0,1)$ es controlable a cero; es decir, $y(T,x) = 0$ en $(0,1)$ si, e solamente si, existe $v_1 \in L^2(0,T)$, tal que

$$\int_0^1 y_0\varphi_1 dx + \nu \int_0^T v_1\varphi_{xx}(t,0)dt = 0. \tag{3.33}$$

Consideremos el funcional lineal

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}: \quad H_0^1(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathcal{J}(\varphi_1) = \dfrac{\nu}{2}\displaystyle\int_0^T |\varphi_{xx}(t,0)|^2\, dt + \int_0^1 y_0\varphi_1 dx. \end{array}$$

Se el funcional $\mathcal{J}$ alcanza su valor mínimo en φ_1, entonces

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{(\mathcal{J}(\varphi_1 + h\psi_1) - \mathcal{J}(\varphi_1))}{h} = \int_0^1 y_0\psi_1 dx + \nu \int_0^T \varphi_{xx}(t,0)\psi_{xx}(t,0)dt, \tag{3.34}$$

para todo $\psi_1 = \psi(0,.) \in H_0^1(0,1)$ donde ψ es solución de (3,1). Luego, tomando $v_1 = \varphi_{xx}(.,0)$, tenemos que (3,33) se verifica y y_0 es controlable a cero.

Para mostrar la existencia de un mínimo basta verificar que el funcional $\mathcal{J}$ es convexo, continuo y coercivo en $H_0^1(0,1)$. El hecho de ser convexo y continuo es trivial. Basta verificar que $\mathcal{J}$ es coercivo. En efecto, por la desigualdad (3,30) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi_1) &\geq \frac{\nu}{2C^*}\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx - \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}\|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)} \\ &= \frac{\nu}{2C^*}\|\varphi_1\|^2_{H_0^1(0,1)} - \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}\|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Así, $\lim_{\|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)}\to+\infty} \mathcal{J}(\varphi_1) = \infty$. Luego, $\mathcal{J}$ es coerciva. Además, tomando $v_1 = \varphi_{xx}(.,0) \in L^2(0,T)$ en la identidad (3,33) y aplicando la desigualdad (3,30) obtenemos

$$\begin{aligned} \nu\int_0^T |v_1|^2 dt = -\int_0^1 y_0\varphi_1 dx &\leq \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}\|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leq \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}\left(C^*\int_0^T |\varphi_{xx}(t,0)|^2\, dt\right)^{1/2} \\ &= \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}\left(C^*\int_0^T |v_1|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C^*}{\nu}\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \tag{3.36}$$

Para concluir la demostración del Teorema 15 sólo falta verificar la desigualdad (3,30). De la desigualdad (3,7) obtenemos una constante positiva C, tal que

$$\int_{\frac{T_0}{3}}^{\frac{2T_0}{3}} \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dxdt \leq \frac{C{T_0}^2}{s^2} e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t,0)|^2 \, dt. \tag{3.37}$$

De (3,10) sigue que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} \int_0^1 |\varphi_x(t,x)|^2 dx. \tag{3.38}$$

Combinando las desigualdades (3,37) y (3,38), tenemos que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3} T_0} \left(\frac{T_0}{s}\right)^2 e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t,0)|^2 \, dt. \tag{3.39}$$

En (3,3), consideremos $s = C(T_0 + T_0^{\frac{1}{2}} + T_0 \, |M|^{\frac{1}{2}} \, \nu^{\frac{1}{2}})$. Así, $\left(\frac{T_0}{s}\right)^2 \leq T_0$, de donde

$$\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t,0)|^2 \, dt. \tag{3.40}$$

Como $\frac{s}{T_0} = \left\{ \frac{C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right) + C \right\}$, para $\nu = \nu(|M|)$ suficientemente pequeño, tal que $\left(\frac{|M|}{\nu}\right)^{1/2}$ sea suficientemente grande, obtemos que

$$C \leq \frac{C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right).$$

Luego, existe una constante positiva C_4, independiente de ν, $|M|$ y y_0 tal que

$$\frac{Cs}{T_0} \leq \frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right).$$

Por lo tanto, en (3,40) sigue que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} e^{\frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1+\frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t,0)|^2 \, dt. \tag{3.41}$$

Además, existe una constante positiva C_4^* tal que

$$\frac{1}{\nu^{4/3}} e^{\frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1+\frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)} \leq e^{\frac{C_4^*|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left(1+\frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}}\right)}. \tag{3.42}$$

Así, combinando (3,41) y (3,42) se obtiene (3,30).

$\square$

Finalmente, el siguiente teorema es un resultado de control exacto para el sistema (2,1) donde M es una constante.

Teorema 16. *Sea M una constante y $\nu > 0$ fijo. Entonces, para cada $y_0, y_1 \in L^2(0,1)$, existen v_1 y v_2 en $L^2(0,T)$, tal que la solución $y \in Y_0$ de (2,1) con $v_3 = 0$ satisface $y|_{t=T} = y_1$ en $(0,1)$.*

Demostración. Como $y_1 \in L^2(0,1)$ tenemos que $y_{1,x} \in H^{-1}(0,1)$. Sea ahora $h \in Y_0$ solución del sistema

$$\begin{cases} h_t + \nu h_{xxx} + M h_x = 0 & \text{en}(0,T) \times (0,1) \\ h \mid_{x=0} = h \mid_{x=1} = h_x \mid_{x=0} = 0 & \text{en } (0,T) \\ h \mid_{t=T} = y_{1,x} & \text{en } (0,1). \end{cases} \tag{3.43}$$

La existencia y regularidad de h son dadas por la Proposição 18. Definimos

$$z(t,x) = \int_0^x h(t,s)ds.$$

Como $z_x(t,x) = h(t,x) \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, entonces $z \in L^2(0,T;H^1(0,1))$. Por la desigualdad de Hölder obtenemos la siguiente estimativa:

$$\|z(t)\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \left| \int_0^x h(t,s)ds \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left| \left(\int_0^x |h(t,s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^x ds \right)^{1/2} \right|^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x |h(t,s)|^2 ds \right) \left(\int_0^x ds \right) dx \leq \|h(t)\|^2_{L^2(0,1} \int_0^1 x dx$$

$$\leq \|h(t)\|^2_{L^2(0,1}.$$

Así, $z \in C^0([0,T];L^2(0,1))$. Luego $z \in Y_{1/4}$. Definimos

$$\begin{cases} c := z_t + \nu z_{xxx} + M z_x & \text{en} \quad \mathcal{D}'((0,T) \times (0,1)) \\ d := y_1 - z|_{t=T}, & \text{en} \quad L^2(0,1). \end{cases} \tag{3.44}$$

Luego, por la ecuación (3,43) resulta que

$$c_x = h_t + \nu h_{xxx} + M h_x = 0 \quad ; \quad d_x = y_{1,x} - z_x|_{t=T} = y_{1,x} - h|_{t=T} = 0, \tag{3.45}$$

y, por lo tanto, $c(t,x) = c(t)$ en $\mathcal{D}'((0,T) \times (0,1))$ y $d = constante$.

Como $z_x(t,x) = h(t,x) \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, por las inmersiones

$$L^2(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-2}(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-3}(0,1)),$$

obtenemos que

$$\begin{cases} z_{xx} = h_x & \in L^2(0,T;H^{-1}(0,1)), \\ z_{xxx} = h_{xx} & \in L^2(0,T;H^{-2}(0,1)), \\ h_{xxx} & \in L^2(0,T;H^{-3}(0,1)). \end{cases} \tag{3.46}$$

Luego,

$$\begin{cases} h_t = -\nu h_{xxx} - M h_x & \in \quad L^2(0,T;H^{-3}(0,1)), \\ z_{xxx} = h_{xx} & \in \quad L^2(0,T;H^{-2}(0,1)), \\ z_t = \int_0^x h_t(t,s)ds & \in \quad L^2(0,T;H^{-2}(0,1)), \\ c = z_t + \nu h_{xx} + Mh & \in \quad L^2(0,T;H^{-2}(0,1)). \end{cases} \tag{3.47}$$

Como c sólo depende del tiempo, tenemos que $c \in L^2(0,T)$. Introducimos

$$g(t) = d + \int_t^T c(s)ds, \tag{3.48}$$

y por la desigualdad de Hölder se tiene la siguiente estimativa:

$$|g(t)| \leq |d| + T^{1/2}\|c\|_{L^2(t,T)}, \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T].$$

Así, $g \in C^0[0,T]$. Nuevamente, por la desigualdad de Hölder, concluímos que

$$\int_0^T |g(t)|^2 dt \leq 2d^2T + 2T\int_0^T \left(\int_t^T |c(s)|ds\right)^2 dt \leq 2d^2T + 2T^2\|c\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{3.49}$$

Luego,

$$g \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \cap C^0([0,T];L^2(0,1)) = Y_{1/4}.$$

Definiendo

$$\tilde{y} = z + g \in Y_{1/4},$$

de (3,43), (3,44) y (3,46) se obtiene

$$\tilde{y}_x = z_x = h \quad ; \quad \tilde{y}_{xxx} = h_{xx} \quad ; \quad \tilde{y}_x|_{x=1} = h(t,1) = 0 \quad ; \tag{3.50}$$

$$\tilde{y}_t = z_t + g_t = z_t - c = -\nu z_{xxx} - M z_x = -\nu h_{xx} - Mh = -\nu \tilde{y}_{xxx} - M\tilde{y}_x \tag{3.51}$$

$$\tilde{y}|_{t=0} = \tilde{y}_0, \qquad \text{donde} \quad \tilde{y}_0 = z|_{t=0} - g(0) \in L^2(0,1). \tag{3.52}$$

Como

$$\int_0^T |z(t,1)|^2 dt \leq \int_0^T \left(\int_0^1 |h(t,s)|ds\right)^2 dt \leq \|h\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}, \tag{3.53}$$

entonces

$$\tilde{v_1} := \tilde{y}|_{x=0} = z|_{x=0} + g = g \in L^2(0,T) \tag{3.54}$$

y

$$\tilde{v_2} := \tilde{y}|_{x=1} = z|_{x=1} + g \in L^2(0,T). \tag{3.55}$$

Además, de (3,44) tenemos la siguiente igualdad:

$$\tilde{y}(T,x) = z(T,x) + g(T) = z(T,x) + d = z(T,x) + y_1(x) - z(T,x) = y_1(x). \tag{3.56}$$

Por lo tanto, de (3,50), (3,51), (3,52), (3,54), (3,55) y (3,56) existen $\tilde{y}_0 \in L^2(0,1)$ y controles $\tilde{v_1}, \tilde{v_2} \in L^2(0,T)$, tales que la solución $\tilde{y} \in Y_{1/4}$ de

$$\begin{cases} \tilde{y}_t + \nu\tilde{y}_{xxx} + M\tilde{y}_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,1) \\ \tilde{y}\mid_{x=0} = \tilde{v_1}, \quad \tilde{y}\mid_{x=1} = \tilde{v_2}, \quad \tilde{y}_x\mid_{x=1} = 0 & \text{en } (0,T) \\ \tilde{y}\mid_{t=0} = \tilde{y}_0 & \text{en} (0,1), \end{cases} \tag{3.57}$$

satisface

$$\tilde{y}(T,x) = y_1(x).$$

Como $\tilde{y}_0 - y_0 \in L^2(0,1)$ entonces, por el Teorema 15, existe un control $\widehat{v_1} \in L^2(0,T)$, tal que la solución $\widehat{y} \in Y_0$ de

$$\begin{cases} \widehat{y}_t + \nu\widehat{y}_{xxx} + M\widehat{y}_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,1) \\ \widehat{y}\mid_{x=0} = \widehat{v_1}, \quad \widehat{y}\mid_{x=1} = \widehat{y}_x|_{x=1} = 0 & \text{en } (0,T) \\ \widehat{y}\mid_{t=0} = \widehat{y}_0 := \tilde{y}_0 - y_0 & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{3.58}$$

satisface

$$\widehat{y}\mid_{t=T} = 0 \quad \text{en} \quad (0,1).$$

Definimos

$$y = \tilde{y} - \widehat{y} \quad \in \quad Y_0.$$

Finalmente, de (3,57) y (3,58) tenemos que para cada $y_0, y_1 \in L^2(0,1)$, existen $v_1 = \tilde{v_1} - \widehat{v_1}$ y $v_2 = \tilde{v_2}$ en $L^2(0,T)$, tal que la solución $y \in Y_0$ de

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + My_x = 0 & \text{en} (0,T)\times(0,1) \\ y\mid_{x=0} = v_1, \quad y\mid_{x=1} = v_2, \quad y_x|_{x=1} = 0 & \text{en } (0,T) \\ y\mid_{t=0} = \tilde{y}_0 - \widehat{y}_0 = y_0 & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{3.59}$$

satisface

$$y|_{t=T} = (\tilde{y} - \widehat{y})\mid_{t=T} = y_1 \quad \text{en} \quad (0,1).$$

$\square$

Bibliografía

[1] G. B. Airy, *Tides and waves.* Encyclopedia Metropolitana 5 1841.

[2] H.Brezis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications,* Mason Paris, 1983

[3] J. Bona, S.M. Sun and B. Y. Zhang, *A nonhomogeneous boundary-valeu problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain,* Comm. Partial Differential Equations 28(7-8)(2003), 1391-1436.

[4] J. V. Boussinesq, *Théorie de lintumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.*

[5] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No 223. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] M. Cavalcanti, V. Cavalcanti, A.Faminskii and F.Natali, *Decay os solutions to Damped Korteweg-de Vries Type Equation,* Appl. Math Optim 65:221-251, 2011.

[7] E. Cerpa, *Exact controlability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain,* SIAM J.Control Optim. 46(2007), 877-899.

[8] E. Cerpa and E. Crépeau, *Boundary controlability for the non linear Korteweg-de Vries de Vries equation on any critical domain*, Preprint, 2007 (to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéare).

[9] J.M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society 136, 2007.

[10] J.M. Coron and E. Crépeau, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with a critical length.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), 367–398.

[11] S. Dolecki and D. L. Russell, *A general theory of observation and control.* SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 185–220.

[12] A.V. Faminskii, *Cauchy problem for the Korteweg-de-Vries equation and its generalizations,* English transl. in J. Soviet Math. 50, 1381-1420, 1990.

[13] A. V. Faminskii, *On two initial boundary valeu problems for the generalized Kdv equation,* Nonlinear Boundary Problems 14(2004), 58-71.

[14] A. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations,* Lecture Notes, No. 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[15] C. S. Gardner and G. K. Morikawa, *Technical report. Courant Institute of Mathematical Sciences.* New York University. Report No. NYU 9082, 1960.

[16] O. Glass and S. Guerrero, *On the uniform controllability of the Burgers equation,* SIAM J. Control Optim. 46(4)(2007), 1211-1238.

[17] O. Glass and S. Guerrero, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*. Asymptot. Anal. 60 (2008), 61–100.

[18] A.M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações ás Equações de evolução,* Textos de Metodos Matemáticos IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[19] S. Guerrero and G. Lebeau, *Singular optimal control for a transport-difusion equation,* Comm. Partial Differential Equations 32(12)(2007),1813-1836.

[20] J. Holmer, *The initial-boundary valeu problem for the Korteweg- de Vries equation,* Comm. Partial Differential Equations 31(7-9)(2006), 1151–1190.

[21] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 256, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[22] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. Pseudo-Differential Operators,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 274, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.

[23] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. Collection RMA, vol. 36, Masson–John Wiley, Paris–Chicester, 1994.

[24] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*. Philos. Mag. 39 (1895), 422–443.

[25] S.N. Kruzhkov and A.V. Faminskii, *Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de-Vries equation,* English transl.in Sb.Math,48, 391-421, 1984.

[26] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations,* Springer, Rio de Janeiro and Santa Barbara, 2008.

[27] J-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988.

[28] J-L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems.* SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

[29] J-L. Lions and E. Magenes, *Problém̃s aux limites non homogènes et applications*. Vol 1, Travaux et Recherches Mathemátiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

[30] L.A. Medeiros e M.M.A. Milla, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parcias,* Textos de Métodos Matemáticos, n 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[31] L.A. Medeiros e P.H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parcias,* Textos de Métodos Matemáticos, n 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[32] J.M. Muñoz, *Estabilização de Semigrupos e Aplicaciones,* Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[33] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,*vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[34] Rayleigh, (Strutt. J.W.) *On waves.* Phil. Mag. 1 (1976), 257-271.

[35] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain.* ESAIM Control Optim. Cal. Var. 2 (1997), 33–55.

[36] L. Rosier, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker.* ESAIM Control Optim. Cal. Var. 10 (2004), 346–380.

[37] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw Hill, 2da edição, 1974(tradução ao espanhol, Alabama 1979).

[38] J. S. Russell, *Report on waves.* Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.

[39] D. L. Russell and B. Y. Zhang, *Controllability and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain,* SIAM J. Control Optim. 31(3)(1993),659-676.

[40] D. L. Russell and B. Y. Zhang, *Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation,* Trans.Amer. Math. Soc. 348(9)(1996), 3643-3672.

[41] A. Sidi, C. Sulem and P.L.Sulem, *On the Long Time behaviour of a Generalized KdV Equation,* Acta Applicandae Mathemaficae 7 (1986), 35-47. D. Reidel Publishing Company, 1986.

[42] G. G. Stokes, *On the theory of oscillatiory waves.* Trans. Camb. Philos. Soc 1 (1847), 441–55.

[43] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction.* Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[44] N, J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Phys. Rev. Lett. 15 (1965), 240–243.

[45] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators,* Springer-Verlag, New York, 1990.

[46] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods.* SIAM Rev. 47 (2000), 197–243.